

FICHA BIBLIOGRÁFICA DE DOCUMENTO DE OPCIÓN DE GRADO

TITULO COMPLETO		
<p align="center">Selección de portafolios eficientes mediante curva de frontera eficiente markowitz Evaluación de tres niveles de riesgo</p>		
AUTORES		
Apellidos completos	Nombres completos	
CASTAÑEDA MORALES	NICOLAS EDUARDO	
PEÑA AMORTEGUI	JUAN DAVID	
TUTOR DE TRABAJO DE GRADO		
Apellidos completos	Nombres completos	
MONROY	MAURICIO	
PROGRAMA ACADÉMICO		
Nombre del programa	Tipo de programa (marque con una x)	
FINANZAS Y COMERCIO EXTERIOR	Pregrado	X
	Especialización	
	Maestría	
CIUDAD	AÑO DE PRESENTACIÓN DEL TRABAJO DE GRADO	NÚMERO DE PÁGINAS
BOGOTÁ	2017	47
PALABRAS CLAVES		
Español	Inglés	
SELECCIÓN DE PORTAFOLIOS	PORTFOLIO SELECTION	
MERCADO DE CAPITALES	CAPITAL MARKET	
FRONTERA EFICIENTE MARKOWITZ	EFFICIENT SET MARKOWITZ	
RENTA FIJA	FIXED INCOME	
RENTA VARIABLE	VARIABLE INCOME	
NIVEL DE RIESGO ASUMIDO	GIVEN RISK LEVEL	
RESUMEN		
(Máximo 250 palabras)		
<p>El presente documento busca documentar la ejecución de una selección de portafolio evaluando la rentabilidad a determinado nivel de riesgo asumido, bajo la implementación de la metodología de frontera eficiente de Harry Markowitz. Esta demostración práctica se realizará evaluando la rentabilidad de tres (3) portafolios cada uno de estos reflejará un nivel dado de riesgo, es decir nivel bajo de riesgo (Portafolio Conservador), nivel moderado de riesgo (Portafolio Balanceado) y alto nivel de riesgo (Portafolio agresivo). Este análisis se realizara partiendo de las mismas condiciones para los tres portafolios, evaluando periodos de tiempo de liquidación y niveles de inversión idénticos.</p>		

LICENCIA DE USO A FAVOR DE LA FUNDACIÓN UNIVERSITARIA EMPRESARIAL DE LA
CÁMARA DE COMERCIO DE BOGOTÁ – UNIEMPRESARIAL, POR PARTE DE
ESTUDIANTES.

Los suscritos

Nicolás Castañeda Morales con C.C. N° 1.019.102.239
Juan David Peña Amórtegui con C.C.
N° 1.015.439.541

_____ con C.C. N° _____
actuando en calidad de autor(es) de la [obra], [el trabajo de grado],
[presentación], [conferencia], [escrito en general, que lleva por título

_____ elaborada para efectos de optar por el título (optar por el título)
(participar en el seminario o evento), de
Finanzas y comercio Exterior (Programa académico)

Hago entrega a UNIEMPRESARIAL de una copia de dicho trabajo académico en formato digital o electrónico (CD-ROM, etc.) otorgando licencia o autorización de uso sobre la misma, para que en los términos de la Decisión Andina 351, la Ley 23 de 1982 y demás normas aplicables, realice los actos de explotación de los derechos patrimoniales y de manera especial, para que la divulgue, reproduzca, comunique al público y la ofrezca en préstamo al público. La presente licencia o autorización se extiende no solo a la fijación en medio o formato físico, analógico o material, sino también al medio virtual, electrónico, óptico, usos de red, Internet, extranet, intranet, repositorio institucional y demás formatos conocidos o por conocer.

El autor de la obra, manifiesta de igual manera que la obra objeto de esta licencia o autorización de uso es creación original y que se realizó sin infringir los derechos de autor que le correspondan a terceros.

PARÁGRAFO: Si llegase a presentarse cualquier tipo de reclamación o acción por parte de un tercero en cuanto a los derechos de autor sobre la obra en mención, asumiré la responsabilidad, dejando indemne a UNIEMPRESARIAL y saliendo en defensa de los derechos aquí autorizados.

Para constancia se firma el presente documento en Bogotá el año 2017 del mes 03 a los 30 días.

**Selección de portafolios eficientes
mediante curva de frontera eficiente
markowitz
Evaluación de tres niveles de riesgo**

Nicolás Eduardo Castañeda Morales

Juan David Peña Amórtegui

Fundación Universitaria Empresarial de la Cámara de Comercio de
Bogotá
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Bogotá, Colombia 2017

Selección de portafolios eficientes mediante curva de frontera eficiente markowitz Evaluación de tres niveles de riesgo

Nicolás Eduardo Castañeda Morales

Juan David Peña Amórtegui

**Trabajo final de grado presentado como requisito para optar por el título de:
Profesional en Finanzas y Comercio Exterior**

**Tutor:
Mauricio Monroy**

Fundación Universitaria Empresarial de la Cámara de Comercio de Bogotá
Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas
Bogotá, Colombia 2017

Selección de portafolios eficientes mediante curva de frontera eficiente markowitz Evaluación de tres niveles de riesgo

RESUMEN

El presente documento busca documentar la ejecución de una selección de portafolio evaluando la rentabilidad a determinado nivel de riesgo asumido, bajo la implementación de la metodología de frontera eficiente de Harry Markowitz. Esta demostración práctica se realizará evaluando la rentabilidad de tres (3) portafolios cada uno de estos reflejará un nivel dado de riesgo, es decir nivel bajo de riesgo (Portafolio Conservador), nivel moderado de riesgo (Portafolio Balanceado) y alto nivel de riesgo (Portafolio agresivo). Este análisis se realizara partiendo de las mismas condiciones para los tres portafolios, evaluando periodos de tiempo de liquidación y niveles de inversión idénticos.

PALABRAS CLAVES:

Selección de Portafolios, Mercado de Capitales, Frontera Eficiente, Markowitz, Renta fija, Renta Variable, Nivel de riesgo asumido.

Portfolio selection by efficient set Markowitz Evaluation of three risk levels

ABSTRACT

The following paper develops the methodological execution of an optimal portfolio selection, evaluating the corresponding return at a defined risk level, it use the Markowitz Efficient Set theory. This practical demonstration will be developed for three (3) given risk levels, each one of them will reflect one possible position, low risk, medium risk and high risk level. This analysis will be developed starting from the same equal conditions of periods of settlement and amount of investment.

KEY WORDS:

Portfolio selection, Capital Market, Efficient Set, Markowitz, Fixed income, Variable Income, Given risk level.

Contenido	Pág.
Resumen	4
1.Introducción	8
1.1 Marco Conceptual	9
1.1.1 El Sistema Financiero Colombiano.....	10
1.1.2 Acciones	11
1.1.3 Materias Primas.....	12
1.1.4 Divisas	12
1.1.5 Bonos	12
1.2 Marco Teórico	12
1.2.1 Frontera Eficiente - Markowitz.....	12
1.2.2 Portafolio Optimo	13
1.2.3 Ecuaciones Calculo Frontera Eficiente	15
1.2.4 Eficiencia del Mercado	18
2. Selección de Activos	19
3. Metodología Y Desarrollo Del Modelo De Optimización De Portafolios	21
4. Elaboración De Matrices	26
5. Simulación de la Inversión	29
6. Optimización de los Portafolios	33
7. Frontera Eficiente de los Portafolios	38
8. Liquidación de los Portafolios	44
9. Comparación de los Portafolios	48
10. Rentabilidad de los Portafolios	48
11. Ventajas del Modelo	49
12. Conclusiones y Recomendaciones	49
12.1 Conclusiones	49
12.2 Recomendaciones	51
13. Anexos	52
14. Índice de Gráficos	53
15. Índice de Figuras.....	53
16. Índice de Ecuaciones	53
17. Índice de Tablas	54
18. Bibliografía	56

1. INTRODUCCIÓN

En el mercado de valores colombiano, el inversionista se ve enfrentado a múltiples opciones de inversión, dentro de las cuales encuentra una gran cantidad de activos de diversas características, principalmente estos se dividen en el mercado de renta fija y el de renta variable, donde la rentabilidad de los activos define el nivel de riesgo que asume el inversionista. En el mercado de renta fija, se encuentran activos como lo son los bonos de deuda pública, los bonos de deuda privada y CDT's, entre otros. En el mercado de renta variable existen activos como: acciones de empresas, futuros, opciones, swaps, forward, commodities entre otros varios activos.

El inversionista busca encontrar un punto intermedio que le favorezca al realizar una inversión, en donde asumiendo cierto nivel de riesgo obtenga la mayor cantidad de retorno posible, para esto se emplean los portafolios de inversión en los cuales, se incluyen varios activos de diversos tipos en pro de disminuir el riesgo de la totalidad de la inversión. Si un inversionista decide invertir en activos pertenecientes al mismo sector de la economía, el riesgo total de este portafolio será muy similar al riesgo de cada uno de sus activos, puesto que al pertenecer a sectores idénticos o similares, el comportamiento del valor intrínseco de cada activo será afín, entonces su búsqueda de diversificar el riesgo, no será fructífera; por el contrario el inversionista que opta por un portafolio compuesto por activos de sectores que se comporten de manera inversa, tendrá una excelente gestión de riesgo, puesto que en este escenario se logra compensar la posible pérdida de un sector con la ganancia del sector opuesto.

En el mercado bursátil existen varios tipos de riesgos, uno de estos no puede ser eliminado dado que surge por el comportamiento del mercado, que fluctúa de acuerdo a los cambios a nivel político, económico, social e incluso hasta climatológico. Este es el riesgo de mercado, al cual el inversionista se ve expuesto dado que al adquirir un activo a determinado precio, nunca podrá tener la certeza del precio de dicho activo en el futuro. Este riesgo es el que se busca disminuir al conformar un portafolio que involucre activos de diferentes sectores, y que en grupo sus fluctuaciones resulten en un bajo nivel de desviación estándar medida estadística que representa el riesgo.

Es por esto que la meta principal de los inversionistas en los mercados financieros es lograr maximizar los rendimientos minimizando riesgos. Y en pro de conseguir este resultado se han desarrollado una gran cantidad de teorías, siendo una de las más aceptadas y que se emplean en la actualidad la de La Frontera Eficiente de Harry Markowitz, donde se logra establecer la curva de rendimiento vs riesgo que representa el conjunto de portafolios óptimos, es decir, que son aquellos

que para un nivel de riesgo dado se obtenga la mayor rentabilidad, o lo que sería lo mismo, para un nivel de rentabilidad deseado se logre obtener el menor nivel riesgo.

El presente documento plantea la aplicación del modelo de optimización en Excel y posteriormente obtención de portafolios optimizados empleando la herramienta de Solver y bajo las teorías de portafolio de Markowitz, evaluando la representación de la frontera eficiente de cada portafolio para determinar la composición porcentual que tendrá cada activo en el portafolio, de acuerdo a las variables dadas que convengan a la situación específica de cada inversionista.

Se documenta el proceso de elaboración del modelo en formato de manual basado en las ecuaciones de la teoría del portafolio, pero estas se constituyen en su forma matricial, puesto que empleando el cálculo con matrices de Excel, se emplea esta herramienta de más fácil manejo que el método de cálculo por suma de productos.

1.1. MARCO CONCEPTUAL

Dentro de las diferentes posibilidades de inversión en los mercados financieros, el inversionista en todas estas tendrá el derecho de propiedad sobre activos reales o sobre derechos financieros (Kolb, 1993). El presente trabajo se enfocará en aquellos activos a los que el inversionista pueda acceder mediante los intermediarios financieros en Colombia; en este grupo encontramos: Acciones, Materias Primas, Divisas, Índices y Bonos.

Las acciones, materias primas, divisas, índices y bonos como instrumentos de inversión en los mercados financieros implican tanto derechos como obligaciones futuras, estos pueden ser negociados en el mercado bursátil de Colombia o en bolsas alrededor del mundo. En este escenario convergen diferentes tipos de inversionistas dentro de los cuales puede haber personas que administran sus activos de inversión desde el ámbito profesional, como también personas que invierten en estas herramientas desde lo empírico y sin que necesariamente sus conocimientos o habilidades sean las de un corredor de bolsa o un profesional de inversión. También es un punto de convergencia tanto para empresarios que busquen disminuir el riesgo de sus inversiones presentes, como también de inversionistas que estén buscando obtener alguna rentabilidad de sus excesos de liquidez.

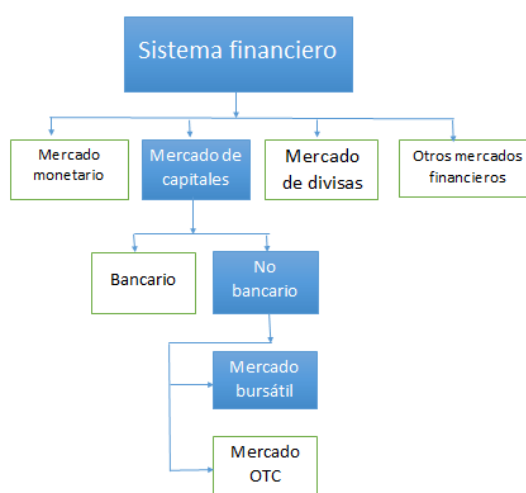
El presente documento busca llegar a documentar lo que sería una liquidación de cada uno de los tres portafolios, cada uno asignado para dado cierto nivel de riesgo, habiendo realizado la

optimización del mismo previa la etapa de inversión, en el siguiente marco teórico se desarrollan los temas asociados al sistema financiero colombiano, a la metodología y técnica de la teoría de la Frontera Eficiente de Markowitz y el concepto de mercado eficiente.

1.1.1 EL SISTEMA FINANCIERO COLOMBIANO

El Sistema Financiero Colombiano está constituido por las entidades participantes en la actividad financiera, dentro de las cuales encontramos: Bancos, Sociedades Fiduciarias, Administradoras de Pensiones y Cesantías, Compañía de Seguros, Banco Central, Organismos de Regulación, Auto reguladores de Mercado, el Gobierno, entre otros (Hirt, 2001). Este sistema se encuentra articulado como lo representa la gráfica a continuación

Figura I
Sistema Financiero Colombiano



Nota. Elaboración propia, construcción a partir de la información de la cartilla del inversionista, de la página de la AMV Colombia (2013)

Como primer grupo del Sistema Financiero Colombiano encontramos el mercado monetario, en el cual se negocian instrumentos financieros de alta liquidez, moderada rentabilidad y bajo riesgo, estos cuentan con vencimiento inferior a un año.

Se encuentra compuesto el Mercado de Capitales por el grupo de instrumentos financieros que han sido emitidos en forma de deuda, estos cuentan con diferentes grados de rentabilidad, riesgo y liquidez (García, 2012). Dentro de este gran grupo encontramos una importante división, en primera instancia se encuentra el Mercado Cambiario o Intermediario, en el cual la actividad se basa en la captación de recursos del público, los cuales son empleados para otorgar préstamos. Como segunda

división de este grupo se encuentra el Mercado de Valores o Mercado No Intermediado, en este convergen directamente las partes tanto interesadas en obtener los recursos (liquidez) como aquellos interesados en invertir sus recursos a cambio de cierta rentabilidad o de cierta participación accionaria en la empresa. En este último grupo encontramos el Mercado Bursátil (Dentro de los sistemas de negociación administrados por las bolsas de valores) y el OTC (Over de Counter) (Por Fuera de los sistemas de negociación administrados por las bolsas de valores)

El Mercado de Divisas es aquel en el cual se negocian pares de divisas, lo que significa el diferencial cambiario entre monedas de diferentes nacionalidades. En este se busca, mediante un tipo de cambio favorable, realizar operaciones de cobertura o de especulación, obteniendo como garantía o resultado el diferencial del tipo de cambio entre dos fechas distintas.

1.1.2. ACCIONES:

Las Acciones son instrumentos financieros que representan la propiedad de una empresa. De este tipo de activos la rentabilidad se puede obtener de la variación en los precios o cotización de dichas acciones en un determinado periodo de tiempo, este precio va ligado a la percepción del mercado sobre el valor de dicha empresa, por esto entran en juego variables como la estabilidad del sector, o factores macroeconómicos que pueden tanto favorecer como perjudicar la cotización del activo, como también depende de los resultados que obtenga la sociedad. Por estas características este activo se clasifica dentro de los de renta variable.

Según la Superfinanciera en Colombia existen tres (3) tipos de acciones: 2012): Las primeras son las Ordinarias, y se caracterizan porque dan el derecho a recibir dividendos en caso de que estos sean decretados por la asamblea de accionistas, así como a votar en la asamblea de accionistas de la compañía. En segundo lugar están las Preferenciales, las cuales no confieren el derecho de voto que tienen las acciones ordinarias. A pesar de lo anterior, concede a su tenedor una prelación para que se le paguen los dividendos antes que a los demás accionistas de la sociedad, si es que la asamblea de accionistas decreta dividendos. Por último las acciones Privilegiadas conceden, además de los beneficios de las acciones ordinarias, adiciones económicas, por ejemplo, el pago de un dividendo superior al que se le ha de pagar a los demás.

1.1.3. MATERIAS PRIMAS:

Todo bien que tiene valor o utilidad y un bajo nivel de especialización, Estos son bienes transables en el mercado de valores. Ejemplo el oro, trigo, café, algodón, entre otros. (Hull, 2002)

1.1.4. DIVISAS:

Son monedas extranjeras que se emplean en un lugar diferente a su país de origen. Las divisas fluctúan entre si dentro del mercado monetario mundial, así se pueden establecer también distintos tipos de cambio entre divisas que varían constantemente en función de diversas variables económicas como la inflación. Ejemplo el dólar, libra esterlina, euro. (Hull, 2002)

1.1.5. BONOS

Son certificados de deuda, promesas de pago futuras representadas y documentadas en un papel, que determina el monto, plazo, moneda y frecuencia de pagos. Se pueden encontrar bonos de tesorería, que son propios del gobierno, emitidos en moneda nacional por el tesoro público. También se pueden encontrar bonos temporales y permanentes los cuales se diferencian en su precio corriente el cual cambia para los permanentes de acuerdo a la tasa de interés vigente. Existen también los bonos corporativos, emitidos por empresas para captar fondos que les permitan financiar sus operaciones Y bonos de arrendamiento financiero emitido por los bancos, exclusivo para tal actividad. (Hull, 2002)

1.2. MARCO TEÓRICO

1.2.1. TEORÍA DE FRONTERA EFICIENTE DE MARKOWITZ

Empleando la definición del mismo Harry Markowitz la frontera eficiente es: “el lugar geométrico del espacio media-varianza definido por aquellas carteras que para un riesgo dado le proporcionan al inversor un rendimiento máximo o, equivalentemente, para un rendimiento dado el riesgo que le deparan es mínimo”.

Entendido esto como las combinaciones exactas del portafolio que describen la máxima rentabilidad para cada dado nivel de riesgo y de igual forma, el mínimo nivel de riesgo para cada dado nivel de rentabilidad.

Markowitz desarrollo esta teoría en 1952 haciendo la introducción a la misma en un artículo titulado *Portfolio Selection publicado en el Journal of Finance* en el cual realizaba un análisis al proceso de selección de un portafolio de inversión. Según Markowitz este proceso se compone de dos grandes etapas, la primera comienza en la observación y la experiencia, y termina con las expectativas de las fluctuaciones futuras de los valores. La segunda etapa consiste en las expectativas y la selección del

portafolio. El basó todo su estudio en la segunda etapa y estableció como reglas de validez entre la relación de valor esperado versus varianza, para la selección de un proyecto por sobre otro, las siguientes premisas.

“El inversión debe optar por A cuando:

- *La rentabilidad esperada de A es mayor o igual que B, y la varianza de A es menor que la de B*
- *La rentabilidad esperada de A es mayor que B, y la varianza de A es menor o igual que la de B”*

Dado lo anterior, se encuentra que en la frontera eficiente, están ubicadas las mejores rentabilidades para un tiempo determinado, representando una gráfica donde las mejores rentabilidades coinciden los mayores grados de riesgo, y paralelamente, los menores grados de riesgo con los menores niveles de rentabilidad.

Sobre el mar de posibilidades frente al que se encuentra un inversionista, se llega a determinar, según sea el grado de aversión al riesgo, su posición en uno u otro punto de la línea de frontera eficiente. Ya que tomar una composición del portafolio que no se encuentre sobre esta línea sería irracional.

1.2.2. PORTAFOLIO OPTIMO

Los activos que compongan el portafolio del inversionista han de tener una desviación estándar asociada al nivel de rentabilidad esperada, o el grado de rentabilidad asociado a la desviación estándar (riesgo) que se encuentra dispuesto a asumir el inversionista. Es por esto que un portafolio óptimo será aquel que cuente con activos que se comporten de manera inversa, en pro de disminuir la correlación entre las inversiones, puesto que en caso de obviar esto y manejar inversiones altamente correlacionadas se asume la posibilidad de que si todas las acciones aumentan su rentabilidad al inversionista le irá bien, pero si estas bajan a la vez el inversionista puede quebrarse, versus el portafolio compuesto por inversiones que se mueven en sentidos opuestos, que logran compensar las pérdidas de una inversión con las ganancias de la otra y así generar un alto grado de reducción del riesgo, para este punto se dice que su correlación es negativa. Un claro ejemplo de esto es el par de inversiones de construcción y el sector electrónico; cuando uno baja el otro sube, o como también lo sería el petróleo contra el dólar.

Otra variable fundamental en la composición de un portafolio óptimo es la participación porcentual que tenga cada activo en la totalidad de la inversión. Es en este punto donde una hoja de cálculo de Excel resulta una excelente herramienta que permite evaluar la inmensa cantidad de posibles

combinaciones de participaciones por activo en pro de encontrar el balance óptimo que reduzca la varianza total del portafolio.

Dicho lo anterior resulta comprensible el hecho de que a medida que aumenta la cantidad de activos en el portafolio, es más factible disminuir la volatilidad del rendimiento. En la medida en que los activos tengan correlaciones inversas) El cuadro a continuación ilustra este fenómeno.

Tabla 1
Cuántos activos hacen un portafolio diversificado

Número de acciones en el portafolio	Volatilidad promedio de los rendimientos anuales del portafolio	Razón de la volatilidad del portafolio sobre la volatilidad de una sola acción
1	49,24%	1,00
2	37,36%	0,76
4	29,69%	0,60
6	26,64%	0,54
8	24,98%	0,51
10	23,93%	0,49
20	21,68%	0,44
30	20,87%	0,42
40	20,46%	0,42
50	20,20%	0,41
100	19,69%	0,40
200	19,42%	0,39
300	19,34%	0,39
400	19,29%	0,39
500	19,27%	0,39

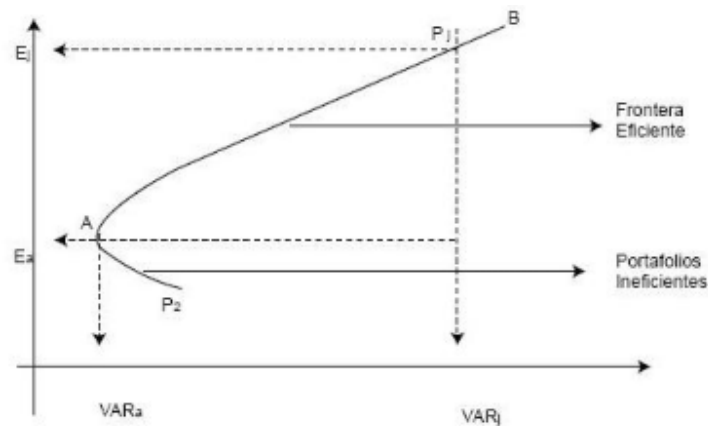
Nota. Tabla Elaboración Propia, Contrucción basada en (Statman, M. How Many Stocks Make a Diversified Portfolio, 1987)

Como lo expresa la anterior tabla, a mayor cantidad de activos en un portafolio de inversión menor la volatilidad del rendimiento de la totalidad del portafolio, es por esto que tanto la cantidad de activos como la combinación de estos pasan a jugar un rol fundamental en el desempeño del mismo.

También es preciso tener en cuenta que las posibles combinaciones de un numero de activos dentro de un portafolio de inversión pueden ser infinitas. Estas combinaciones se obtienen de dividir una suma de dinero en los activos que componen el portafolio, de forma que se disminuya la varianza total del portafolio, esto debe lograrse de modo que la sumatoria de la proporción de cada activo sume uno y además que el promedio ponderado de los retornos de los activos elegidos sea igual a la inversión total. Este conjunto de combinaciones representa gráficamente la curva de la frontera eficiente.

Grafico 1

Curva de frontera eficiente



Fuente: Sharpe, William F. "A Simplified Model for Portfolio Analysis"

Como se mencionó anteriormente cualquiera de los puntos que se encuentre por debajo del cuadrante A, resultaran en niveles de inversión ineficientes, contrario a todos los puntos que conforman la curva ubicada a partir del cuadrante A, que para cada nivel de valor esperado de rendimiento presentan el menor nivel de riesgo, para cada nivel de riesgo presenta el mayor retorno posible.

1.2.3. ECUACIONES CALCULO FRONTERA EFICIENTE

Todo lo anterior concluye que el inversionista racional escogerá una combinación porcentual de participación y de activos para su portafolio eficiente que se encuentre en la curva de la frontera eficiente, y eso abordado a nivel matemático representa la búsqueda de determinar el portafolio que minimizará la varianza total, sujeto a un nivel de rentabilidad preestablecido y que la suma de la participación de cada activo sume uno. Esto se representa en la siguiente ecuación:

Ecuación 1

Sumatoria de la totalidad de activos igual a uno (1)

$$\text{Min } \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m a_k a_j \sigma_{jk}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m a_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^m a_i R_i = R$$

Fuente: Sharpe, William F. "A Simplified Model for Portfolio Analysis"

Dónde:

m: Cantidad de Activos

a : Combinación de las proporciones de cada una de las acciones dentro del portafolio

σ_{jk} : Covarianza de los activos j y k

R_i : Proporción de participación de la inversión sobre la acción i

R: Suma total de la inversión en el portafolio i

La anterior ecuación sustenta que la totalidad de la sumatoria de composición de acciones debe ser igual a uno (1) sin importar la participación de cada uno de estos, o la covarianza presente entre ellos, siempre el total de la sumatoria será igual a uno (1).

Se debe tener en cuenta que no se restringen las proporciones de inversión para cada activo a_i . Esto significa que dentro de la teoría se pueden incluir acciones que no se tienen, pero que serían vendidas a futuro. Para el caso presente y en la práctica dadas las complicaciones de los mecanismos para vender en el futuro con agilidad, se restringe la participación de los activos a una metodología de inversión lineal donde el portafolio tendrá participaciones de compra y posterior venta exclusivamente.

Respecto a la función objetivo de acuerdo a la metodología de Markowitz y posteriormente desarrollada por Modigliani, se expresa como una multiplicación entre matrices, como lo demuestra la siguiente ecuación (Modigliani, 2009):

Ecuación 2

Función objetivo multiplicación de matrices

$$\text{Min } \sigma_p = \sqrt{[W]^t [\varepsilon] [W]}$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^m [W]_i = 1$$

$$[W]^t [R] = R$$

Fuente: Sharpe, William F. "A Simplified Model for Portafolio Analysis"

Dónde:

m : Cantidad de Activos

$[W]$: Vector columna de dimensión $m \times 1$ que contiene las participaciones porcentuales del capital de inversión de cada uno de los m activos dentro del portafolio

$[W]^t$: Vector transpuesto de $[W]$, de dimensión $1 \times m$

$[\varepsilon]$: Matriz de covarianzas que incluye las covarianzas de los m activos seleccionados

σ_p : Matriz de volatilidad del portafolio, de dimensión 1×1

R : Rentabilidad total del portafolio, de dimensión 1×1 , la cual se calcula como p producto de la matriz $[W]^t$ de dimensión $1 \times m$, por el vector $[R]$ que contiene los retornos de cada activo $m \times 1$

La anterior ecuación representa que el escenario ideal donde la multiplicación resultante de las matrices correspondientes a las participaciones porcentuales de cada uno de los activos en términos de capital de inversión, por la covarianza de los activos seleccionados, ha de generar el resultado con el mejor balance positivo entre la relación de riesgo rendimiento, donde se busque minimizar la covarianza inherente a la inversión y maximizar la rentabilidad de la totalidad de los activos.

1.2.4. EFICIENCIA DE MERCADO

En el presente documento se maneja la eficiencia del mercado describiendo su significado como la relación entre variables relativas a la empresa y su correspondiente incidencia en la fluctuación de las cotizaciones del mercado, esto presenta un carácter fundamental para que las teorías presentadas funcionen. Se habla de un mercado eficiente cuando el mercado se comporta de manera en el cual los precios de un título valor negociado de manera bursátil (bonos, acciones, commodities, divisas y demás activos que actúan con rentabilidad fija o variable) demuestran el

valor que el mercado mismo les designa (Fama, 1970). Este valor revela la información contenida por el mercado de contratos ofertado y demandado por los inversionistas. Como ejemplo una empresa que realiza grandes inversiones en proyectos, infraestructura, fusiones y demás, se mantiene en un creciente estado económico que atrae compradores interesados en poseer sus acciones y esto hace que el precio se incremente hasta cierto límite; el mercado actúa de una manera rápida y eficiente, pero no perfecta ya que no siempre tiene el mismo grado de valoración.

Existe eficiencia de mercado débil, en donde se desprende la correlación entre precios históricos con rentabilidad futura. Los precios actuales de mercado revelan la disponibilidad de valor y volumen que el activo presenta de manera histórica. Es decir que, “el mercado no tiene memoria”. Ningún inversionista podría sacar ventaja de amplios análisis técnicos, como variaciones históricas, volatilidad, tendencias y demás ya que en un mercado con eficiencia débil toda esta información ya está incorporada al precio actual.

Cuando se presenta una eficiencia de mercado semi-fuerte, la información pública actual que tiene que ver con el análisis de indicadores financieros, fusiones, balance general, estado de resultados y demás viene ya involucrada en los precios, por lo cual un inversionista que realice fuertes análisis fundamentales no podrá sacar provecho de esto; la información actual de las corporaciones no está correlacionada a la rentabilidad futura.

En un escenario de eficiencia de mercado fuerte, ninguna de la información que se puede recolectar dicha en los escenarios anteriores tiene correlación con la rentabilidad futura. Los precios traen involucrados toda clase de información contenida por las organizaciones. Los inversionistas manejan el mercado de manera que trataran de ofertar la acción más costosa y demandar la de menor precio y a medida que esto sucede de manera global, los precios se nivelan en la práctica especulativa, por el lado de arbitraje el inversionista elegirá entre alternativas que produzcan un beneficio igual pero la que este ofertada con menor precio.

Respecto al mercado colombiano es preciso decir que presenta una cierta eficiencia semi-fuerte ya que es un mercado emergente en el cual existe mucha concentración por parte de los activos y esto hace que el análisis fundamental que viene asociado al precio sea matemáticamente aceptable para entrar a un método especulativo del cual se saque ventaja (rentabilidad).

Dados los parámetros anteriormente mencionados se procede a describir la composición de los portafolios para los niveles establecidos de riesgo y la posterior elaboración del modelo de frontera

eficiente de Markowitz empleando la herramienta de Solver en Excel, para la optimización de dichos portafolios y finalizar con su respectiva liquidación y análisis.

Con el objetivo de evaluar la rentabilidad y el funcionamiento de la metodología mencionada, el presente trabajo dispone la elaboración de tres (3) portafolios.

2. SELECCIÓN DE ACTIVOS

Portafolio de Bajo Riesgo: Compuesto por 10 Activos distribuidos 80% participación Renta Fija y 20% participación Renta Variable

Portafolio de Riesgo Intermedio: Compuesto por 10 Activos distribuidos 50% participación Renta Fija y 50% participación de Renta Variable.

Portafolio de Alto Riesgo: Compuesto por 10 Activos distribuidos 20% participación Renta Fija y 80% participación Renta Variable

A continuación se encuentra la composición y una breve explicación de los activos elegidos para cada uno de los portafolios de inversión.

Portafolio de alto Riesgo:

Tabla 2
Composición de activos portafolio de alto riesgo

#	ACTIVO	RENTA
1	Canacol Energy Ltd. (CNE)	Renta Variable
2	Bancolombia	Renta Variable
3	Interconexión Eléctrica SA (ISA)	Renta Variable
4	Crude Oil - Apr 17 (CLJ7)	Renta Variable
5	Almacenes Éxito SA (IMI)	Renta Variable
6	Brent Oil Futures - May 17 (LCOK7)	Renta Variable
7	USD/COP	Renta Variable
8	Gold Futures - Apr 17 (GCJ7)	Renta Variable
9	US 2 Year T-Note Futures - Jun 17 (TUM7)	Renta Fija
10	Colombia 4-Year Bond Yield Historical Data	Renta Fija

Nota. Elaboración propia

El presente portafolio se encuentra conformado por 8 activos de renta variable y 2 activos de renta fija, lo cual otorga el alto nivel dado de riesgo, los activos seleccionados para la composición de este portafolio pertenecen a diferentes sectores de la economía y son de diferentes tipos, se tienen cuatro (4) acciones, tres (3) commodities, dos (2) de estos son energéticos y el otro es un metal, el

portafolio también cuenta con una (1) divisa y dos (2) activos de renta fija bonos gubernamentales de deuda pública.

Esta composición mixta de los activos ha de proveer un bajo nivel de correlación entre los activos y busca consolidar un grupo de inversión con un buen margen de diversificación nato por las características mezcladas de los sectores.

Portafolio de Riesgo Intermedio:

Tabla 3
Composición de activos portafolio de riesgo intermedio

#	ACTIVO	RENTA
1	Canacol Energy Ltd. (CNE)	Renta Variable
2	Crude Oil - Apr 17 (CLJ7)	Renta Variable
3	Brent Oil Futures - May 17 (LCOK7)	Renta Variable
4	Interconexión Eléctrica SA (ISA)	Renta Variable
5	Almacenes Éxito SA (IMI)	Renta Variable
6	US 2 Year T-Note Futures - Jun 17 (TUM7)	Renta Fija
7	Colombia 4-Year Bond Yield Historical Data	Renta Fija
8	EuroMTS Eurozone IG Government Broad 7-10Y 1730 (EMIGD5=)	Renta Fija
9	Canadá 3-Year Bond Yield	Renta Fija
10	U.S. 5-Year Bond Yield	Renta Fija

Nota. Elaboración propia

El presente portafolio está compuesto por cinco (5) activos de renta fija y cinco (5) activos de renta variable, al igual que la composición del portafolio anterior se realizó la selección de los activos en búsqueda de generar una composición diversa de sectores de la economía y países procedentes de los bonos de deuda pública. Para este caso se emplearon tres (3) acciones pertenecientes a la Bolsa de Valores de Colombia en pro de evaluar el desarrollo económico de estos sectores económicos del país en el segundo mes del año 2017. También se incluyen dos (2) activos energéticos que tienen una fuerte participación en el PIB de Colombia.

Portafolio de Bajo Riesgo:

Tabla 4
Composición de activos portafolio de bajo riesgo

#	ACTIVO	RENTA
1	Almacenes Éxito SA (IMI)	Renta Variable
2	Crude Oil - Apr 17 (CLJ7)	Renta Variable
3	US 2 Year T-Note Futures - Jun 17 (TUM7)	Renta Variable

4	Colombia 4-Year Bond Yield Historical Data	Renta Variable
5	Chile 3-Year Bond Yield	Renta Variable
6	EuroMTS Eurozone IG Government Broad 7-10Y 1730 (EMIGD5=)	Renta Variable
7	Canadá 3-Year Bond Yield	Renta Variable
8	U.S. 5-Year Bond Yield	Renta Variable
9	Perú 9-Year Bond Yield	Renta Fija
10	Colombia 4-Year Bond Yield Historical Data	Renta Fija

Nota. Elaboración propia

Para el portafolio de bajo nivel de riesgo se seleccionaron dos (2) activos de renta variable y ocho (8) de renta fija, la totalidad de la renta fija está dada por siete (7) bonos de deuda pública con diversos plazos de maduración en pro de evaluar diferentes niveles de rentabilidad, y un (1) índice de bonos europeos.

Una vez se ha realizado la selección de los activos en los portafolios de inversión, se procede a la elaboración del modelo de optimización del portafolio, para esto se debe tomar la información histórica de los cierres de cotización diarios de cada uno de los activos, en este ejercicio se utilizó como proveedor de la información la página de www.investing.com que brinda la información histórica. Respecto al proveedor de la información es pertinente que dicha data sea fidedigna, pero el carácter global del mercado de capitales garantiza que esta información es de muy fácil acceso y se puede encontrar en un gran número de sitios alrededor de internet.

Un punto que entra en consideración es la cantidad de información histórica que es relevante tener en cuenta, concepto que está altamente relacionado a la eficiencia del mercado, puesto que en el escenario en el que se evalúa una cantidad de información histórica excesiva se cae en el riesgo de obtener resultados de promedio de rendimientos diarios, varianzas y desviaciones estándar alejados del comportamiento presente del activo, y que se apartaren de las características macroeconómicas del sector que se puedan estar presentando en el momento. Por esto se evalúa la información relativa al último año de cotizaciones de los activos seleccionados. Se toma como margen de inicio y de cierre de la información histórica el 20 de Enero de 2016 y el 20 de Enero de 2017.

3. METODOLOGÍA Y DESARROLLO DEL MODELO DE OPTIMIZACIÓN DE PORTAFOLIOS

La tabla a continuación presenta un ejemplo de información histórica de los primeros 12 días del rango de uno de los activos seleccionados:

Tabla 5
Información histórica cotización diaria del activo

Canacol Energy Ltd. (CNE)	
20/01/2016	4,775.00
21/01/2016	4,790.00
22/01/2016	4,780.00
25/01/2016	4,870.00
26/01/2016	5,590.00
27/01/2016	5,500.00
28/01/2016	5,640.00
29/01/2016	5,830.00
01/02/2016	5,990.00
02/02/2016	6,190.00
03/02/2016	6,000.00
04/02/2016	5,830.00

Nota. Elaboración propia

Una vez se tiene la información histórica de cada uno de los activos de los portafolios de inversión se procede a calcular el rendimiento diario para cada día observado, se emplea la función de Logaritmo Natural.

Tabla 6
Rendimiento diario del activo

Canacol Energy Ltd. (CNE)		
20/01/2016	4,775.00	
21/01/2016	4,790.00	=LN(B3/B2)
22/01/2016	4,780.00	LN(número)
25/01/2016	4,870.00	1.87%
26/01/2016	5,590.00	13.79%
27/01/2016	5,500.00	-1.62%
28/01/2016	5,640.00	2.51%
29/01/2016	5,830.00	3.31%
01/02/2016	5,990.00	2.71%
02/02/2016	6,190.00	3.28%
03/02/2016	6,000.00	-3.12%
04/02/2016	5,830.00	-2.87%

Nota. Elaboración propia

Este número representa la variación positiva o negativa por día del precio de cotización del activo, y se empleara posteriormente para calcular un promedio de esta variación y a partir de esto comenzar a obtener la información relevante a la rentabilidad del activo

Posteriormente se halla la diferencia entre cada uno de los rendimientos diarios y el promedio de la totalidad de los mismos, esto permite determinar la varianza y la desviación estándar del activo.

Tabla 7

Diferencia entre rendimientos diarios del activo

Canacol Energy Ltd. (CNE)			
20/01/2016	4,775.00		
21/01/2016	4,790.00	0.31%	$=(C3-C\$250)^2$
22/01/2016	4,780.00	-0.21%	0.000023
25/01/2016	4,870.00	1.87%	0.000255
26/01/2016	5,590.00	13.79%	0.018280
27/01/2016	5,500.00	-1.62%	0.000358
28/01/2016	5,640.00	2.51%	0.000504
29/01/2016	5,830.00	3.31%	0.000927
01/02/2016	5,990.00	2.71%	0.000595
02/02/2016	6,190.00	3.28%	0.000910
03/02/2016	6,000.00	-3.12%	0.001146
04/02/2016	5,830.00	-2.87%	0.000987
Promedio		0.27%	

Nota. Elaboración propia

Una vez se tiene este dato se procede a realizar el cálculo de los indicadores estadísticos de la acción para ver su comportamiento histórico en términos de riesgo y rentabilidad, para esto se calcula el promedio de los rendimientos diarios, la sumatoria de los rendimientos diarios, la varianza, la desviación estándar, el promedio anual, la desviación estándar anual y la sumatoria de la varianza diaria.

Tabla 8

Medidas estadísticas relevantes del activo

Canacol Energy Ltd. (CNE)			
20/01/2016	4,775.00		
21/01/2016	4,790.00	0.31%	0.000000
22/01/2016	4,780.00	-0.21%	0.000023
25/01/2016	4,870.00	1.87%	0.000255
26/01/2016	5,590.00	13.79%	0.018280
27/01/2016	5,500.00	-1.62%	0.000358
28/01/2016	5,640.00	2.51%	0.000504
29/01/2016	5,830.00	3.31%	0.000927
01/02/2016	5,990.00	2.71%	0.000595
02/02/2016	6,190.00	3.28%	0.000910
03/02/2016	6,000.00	-3.12%	0.001146
04/02/2016	5,830.00	-2.87%	0.000987
	Promedio	0.27%	
	Sumatoria	0.662310	0.165164
	Varianza	0.000671	
	Desv Est	2.59%	
	Prom Anual	66.23%	
	Des. Est. Anua	40.72%	

Nota. Elaboración propia

Posterior al cálculo de estos indicadores estadísticos, procedemos a obtener la covarianza entre los dividendos diarios de cada activo, en este paso se debe calcular la covarianza existente entre cada uno de los rendimientos diarios para todos los activos que componen el portafolio.

Es decir que para un rango de información histórica de un año correspondiente a 248 observaciones, se debe calcular la covarianza de cada uno de estos rendimientos diarios contra cada uno de los 248 rendimientos diarios de cada activo de los diez (10) que componen el portafolio.

Tabla 9

Covarianza diaria entre activo 1 y activo 2

Canacol Energy Ltd. (CNE)			Bancolombia			Covarianza Canacol E
20/01/2016	4,775.00		20/01/2016	22000.0		Bancolombia
21/01/2016	4,790.00	0.31%	21/01/2016	22400.0	1.80%	=+C3*H3
22/01/2016	4,780.00	-0.21%	22/01/2016	23280.0	3.85%	-0.0000805
25/01/2016	4,870.00	1.87%	25/01/2016	22780.0	-2.17%	-0.0004050
26/01/2016	5,590.00	13.79%	26/01/2016	22740.0	-0.18%	-0.0002423
27/01/2016	5,500.00	-1.62%	27/01/2016	22900.0	0.70%	-0.0001138
28/01/2016	5,640.00	2.51%	28/01/2016	23240.0	1.47%	0.0003705
29/01/2016	5,830.00	3.31%	29/01/2016	23980.0	3.13%	0.0010386
01/02/2016	5,990.00	2.71%	01/02/2016	24040.0	0.25%	0.0000677
02/02/2016	6,190.00	3.28%	02/02/2016	23740.0	-1.26%	-0.0004124
03/02/2016	6,000.00	-3.12%	03/02/2016	24560.0	3.40%	-0.0010587
04/02/2016	5,830.00	-2.87%	04/02/2016	24460.0	-0.41%	0.0001173

Nota. Elaboración propia

Una vez se obtiene la covarianza entre los dividendos diarios del portafolio se procede a calcular la covarianza total del par de activos, y esta se obtiene de la resta entre el promedio de las covarianzas diarias y la multiplicación de los promedios del promedio de rendimiento diario para cada activo

Tabla 10

Promedio de covarianza entre par de activos

Canacol Energy Ltd. (CNE)			Bancolombia			Covarianza Canacol Energ	
20/01/2016	4,775.00		20/01/2016	22000.0		Bancolombia	
21/01/2016	4,790.00	0.31%	21/01/2016	22400.0	1.80%	0.0000565	
22/01/2016	4,780.00	-0.21%	22/01/2016	23280.0	3.85%	-0.0000805	
25/01/2016	4,870.00	1.87%	25/01/2016	22780.0	-2.17%	-0.0004050	
26/01/2016	5,590.00	13.79%	26/01/2016	22740.0	-0.18%	-0.0002423	
27/01/2016	5,500.00	-1.62%	27/01/2016	22900.0	0.70%	-0.0001138	
28/01/2016	5,640.00	2.51%	28/01/2016	23240.0	1.47%	0.0003705	
29/01/2016	5,830.00	3.31%	29/01/2016	23980.0	3.13%	0.0010386	
01/02/2016	5,990.00	2.71%	01/02/2016	24040.0	0.25%	0.0000677	
02/02/2016	6,190.00	3.28%	02/02/2016	23740.0	-1.26%	-0.0004124	
03/02/2016	6,000.00	-3.12%	03/02/2016	24560.0	3.40%	-0.0010587	
04/02/2016	5,830.00	-2.87%	04/02/2016	24460.0	-0.41%	0.0001173	
	Promedio	0.27%		Promedi	0.09%		
	Sumatoria	0.662310		Sumatori	0.228945	PROM	0.0000049
	Varianza	0.000671		Varianza	0.000161	COVAR	=+A2251-($\$C\250 *H250)

Nota. Elaboración propia

Se continúa estableciendo el coeficiente de correlación resultante de la división entre la covarianza del par de activos y el producto de la desviación estándar de cada uno de los activos.

Tabla 11

Desviación estándar entre par de activos

Canacol Energy Ltd. (CNE)			Bancolombia			Covarianza Canacol Energy	
20/01/2016	4,775.00		20/01/2016	22000.0		Bancolombia	
21/01/2016	4,790.00	0.31%	21/01/2016	22400.0	1.80%		0.0000565
22/01/2016	4,780.00	-0.21%	22/01/2016	23280.0	3.85%		-0.0000805
25/01/2016	4,870.00	1.87%	25/01/2016	22780.0	-2.17%		-0.0004050
26/01/2016	5,590.00	13.79%	26/01/2016	22740.0	-0.18%		-0.0002423
27/01/2016	5,500.00	-1.62%	27/01/2016	22900.0	0.70%		-0.0001138
28/01/2016	5,640.00	2.51%	28/01/2016	23240.0	1.47%		0.0003705
29/01/2016	5,830.00	3.31%	29/01/2016	23980.0	3.13%		0.0010386
01/02/2016	5,990.00	2.71%	01/02/2016	24040.0	0.25%		0.0000677
02/02/2016	6,190.00	3.28%	02/02/2016	23740.0	-1.26%		-0.0004124
03/02/2016	6,000.00	-3.12%	03/02/2016	24560.0	3.40%		-0.0010587
04/02/2016	5,830.00	-2.87%	04/02/2016	24460.0	-0.41%		0.0001173
	Promedio	0.27%		Promedio	0.09%		
	Sumatoria	0.662310		Sumatori	0.228945	PROM	0.0000049
	Varianza	0.000671		Varianza	0.000161	COVAR	0.0000024
	Desv Est	2.59%		Desv Est	1.27%	COEF	=+A252/(\$C\$253*H253)

Nota. Elaboración propia

Este coeficiente de correlación va a permitir calcular la primera matriz de correlación, la cual representa en formato matricial el comportamiento a nivel estadístico entre los activos, en otras palabras representa el grado de “influencia” que tiene el movimiento de la cotización de cada uno de los activo en los demás.

4. ELABORACIÓN DE MATRICES

Se procede a elaborar las matrices para posteriormente poder operarlas entre sí y obtener el resultado deseado de la segunda ecuación expuesta anteriormente, como primer paso de esta fase se elabora la matriz de correlación que representa el nivel de interrelación existente entre cada par de activos, con esto se busca plantear un escenario inicial de correlaciones positivas y negativas entre los activos y que en pasos posteriores le permita al Solver evaluar en que cantidad específica de correlación tanto positiva como negativa va a otorgar el mejor nivel de rendimiento por cantidad riesgo asumido.

La matriz de correlación se obtiene llamando los coeficientes recién calculados y ubicándolos en su correspondiente posición en la matriz:

Tabla 12

Matriz de correlación para el portafolio

MATRIZ DE CORRELACIÓN										
	Canacol Ener	Bancolombia	Interconexi	Crude Oil - A	Almacenes E	Brent Oil Fut	USD/COP	Gold Futures	US 2 Year T-N	Colombia 4-Y
Canacol Ener	100.00%	0.72%	3.46%	0.96%	8.11%	4.47%	-1.15%	-1.37%	-3.48%	-1.19%
Bancolombia	0.72%	100.00%	-0.03%	32.76%	35.60%	34.16%	-24.43%	-5.59%	-14.18%	-15.80%
Interconexi	3.46%	-0.03%	100.00%	14.54%	21.47%	18.55%	-19.99%	-4.84%	-8.85%	-15.67%
Crude Oil - Ap	0.96%	32.76%	14.54%	100.00%	13.80%	92.51%	-52.97%	-9.66%	-17.70%	-29.10%
Almacenes Ex	8.11%	35.60%	21.47%	13.80%	100.00%	13.93%	-24.46%	-0.05%	-8.94%	-19.69%
Brent Oil Futu	4.47%	34.16%	18.55%	92.51%	13.93%	100.00%	-48.96%	-7.54%	-21.49%	-23.90%
USD/COP	-1.15%	-24.43%	-19.99%	-52.97%	-24.46%	-48.96%	100.00%	-2.16%	9.57%	42.61%
Gold Futures -	-1.37%	-5.59%	-4.84%	-9.66%	-0.05%	-7.54%	-2.16%	100.00%	34.61%	-5.48%
US 2 Year T-N	-3.48%	-14.18%	-8.85%	-17.70%	-8.94%	-21.49%	9.57%	34.61%	100.00%	-0.40%
Colombia 4-Y	-1.19%	-15.80%	-15.67%	-29.10%	-19.69%	-23.90%	42.61%	-5.48%	-0.40%	100.00%

Nota. Elaboración propia

Cómo se puede observar los campos en donde coinciden los activos se completan con un 100% y el resto de campos llevan la información del coeficiente obtenido de la varianza del par de activos versus el producto de las desviaciones estándar de los mismos.

A continuación se procede a completar la matriz de riesgo, la cual incluye los valores de desviación estándar anualizada para cada activo, esta se elabora con el propósito de poder relacionarla con la matriz de correlación y obtener un ponderado estadístico que represente el peso del riesgo de cada activo en la correlación de los dividendos de los mismos.

Tabla 13
Matriz de Riesgo para portafolio

MATRIZ DE RIESGO										
	Canacol Ener	Bancolombia	Interconexi	Crude Oil - A	Almacenes E	Brent Oil Fut	USD/COP	Gold Futures	US 2 Year T-N	Colombia 4-Y
Canacol Ener	40.72%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Bancolombia	0.00%	19.91%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Interconexi	0.00%	0.00%	15.58%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Crude Oil - Ap	0.00%	0.00%	0.00%	46.28%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Almacenes Ex	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	20.26%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
Brent Oil Futu	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	43.19%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
USD/COP	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	17.77%	0.00%	0.00%	0.00%
Gold Futures -	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	15.88%	0.00%	0.00%
US 2 Year T-N	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.96%	0.00%
Colombia 4-Y	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	16.02%

Nota. Elaboración propia

Una vez se tienen estas dos matrices, se procede a obtener el producto de las mismas para construir la matriz de correlación – riesgo. Para esto se emplea la función de =MMULT en la hoja de cálculo de Excel

Tabla 14
Matriz de Correlación – Riesgo para portafolio

MATRIZ DE CORRELACIÓN RIESGO										
	Canacol Ener	Bancolombi	Interconexió	Crude Oil - A	Almacenes Ex	Brent Oil Fut	USD/COP	Gold Futures	US 2 Year T-N	Colombia 4-Y
Canacol Ener										
Bancolombi	0.29%									
Interconexió	1.41%	-0.01%								
Crude Oil - A	0.39%	6.52%	2.27%							
Almacenes E	3.30%	7.09%	3.34%	6.38%						
Brent Oil Fut	1.82%	6.80%	2.89%	42.81%	2.82%					
USD/COP	-0.47%	-4.86%	-3.11%	-24.51%	-4.96%	-21.15%				
Gold Futures	-0.56%	-1.11%	-0.75%	-4.47%	-0.01%	-3.26%	-0.38%			
US 2 Year T-N	-1.42%	-2.82%	-1.38%	-8.19%	-1.81%	-9.28%	1.70%	5.50%		
Colombia 4-Y	-0.49%	-3.15%	-2.44%	-13.47%	-3.99%	-10.32%	7.57%	-0.87%	0.00%	

Nota. Elaboración propia

Como se mencionaba anteriormente esta matriz surge de la multiplicación entre las matrices de correlación y riesgo, y busca reflejar el comportamiento que se da entre los activos del portafolio de inversión teniendo en cuenta su nivel de covarianza y su nivel de riesgo, en este punto se puede observar como las correlaciones negativas generan una estructura de diversificación del riesgo, compensando el posible comportamiento negativo o positivo de un activo contra el comportamiento contrario de otro de ellos.

Como paso siguiente se elabora la matriz de varianza – covarianza que se obtiene del producto entre la matriz de correlación – riesgo y la matriz de riesgo.

Tabla 15

Matriz Varianza – Covarianza para portafolio

MATRIZ VAR - COVAR										
	Canacol Ener	Bancolombi	Interconexió	Crude Oil - A	Almacenes Ex	Brent Oil Fut	USD/COP	Gold Futures	US 2 Year T-N	Colombia 4-Y
Canacol Ener	16.58%	0.03%	0.08%	0.21%	0.33%	0.83%	-0.04%	-0.03%	0.00%	-0.03%
Bancolombi	0.12%	3.97%	0.00%	7.02%	1.46%	6.37%	-0.77%	-0.14%	0.00%	-0.41%
Interconexió	0.57%	0.00%	2.43%	3.11%	0.88%	3.46%	-0.63%	-0.12%	0.00%	-0.40%
Crude Oil - A	0.16%	1.30%	0.35%	21.41%	0.57%	17.26%	-1.67%	-0.24%	0.00%	-0.75%
Almacenes E	1.35%	1.41%	0.52%	2.95%	4.10%	2.60%	-0.77%	0.00%	0.00%	-0.51%
Brent Oil Fut	0.74%	1.35%	0.45%	19.81%	0.57%	18.65%	-1.55%	-0.19%	0.00%	-0.61%
USD/COP	-0.19%	-0.97%	-0.49%	-11.34%	-1.00%	-9.13%	3.16%	-0.05%	0.00%	1.09%
Gold Futures	-0.23%	-0.22%	-0.12%	-2.07%	0.00%	-1.41%	-0.07%	2.52%	0.00%	-0.14%
US 2 Year T-N	-0.58%	-0.56%	-0.21%	-3.79%	-0.37%	-4.01%	0.30%	0.87%	0.01%	-0.01%
Colombia 4-Y	-0.20%	-0.63%	-0.38%	-6.23%	-0.81%	-4.46%	1.35%	-0.14%	0.00%	2.57%

Nota. Elaboración propia

Una vez se tienen estas matrices se procede a elaborar el cuadro de participación de activos en el portafolio, para posteriormente obtener los vectores de participación. Para el cuadro de participación o cuadro de composición del portafolio es indispensable tener en cuenta cuatro (4) variables fundamentales: el rendimiento anual (representa el retorno histórico de cada activo), la desviación estándar anualizada (representa el riesgo histórico de cada activo), el porcentaje de participación y el respectivo nivel de inversión para cada activo dado la suma de inversión total del portafolio.

Tabla 16

Rendimiento y desviación estándar anualizada, porcentaje de participación y valor de inversión para portafolio

	RENTABILIDAD	RIESGO	%	VALOR
	K' ANUAL	D.E. ANUAL	%	INVERSIÓN
Canacol Energy Ltd	66.23%	40.72%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Bancolombia	22.89%	19.91%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Interconexión Elec	35.22%	15.58%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Crude Oil - Apr 17 O	68.03%	46.28%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Almacenes Exito S	11.28%	20.26%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Brent Oil Futures -	68.83%	43.19%	10.00%	\$ 100,000,000.00
USD/COP	-14.99%	17.77%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Gold Futures - Apr	8.42%	15.88%	10.00%	\$ 100,000,000.00
US 2 Year T-Note F	-0.726%	0.962%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Colombia 4-Year B	-20.728%	16.023%	10.00%	\$ 100,000,000.00
			100.00%	
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000			

Nota. Elaboración propia

5. SIMULACIÓN DE LA INVERSIÓN

Para este punto definimos la suma total a invertir en el portafolio, el presente documento evaluara los tres (3) portafolios con una inversión de 1.000 millones de pesos colombianos.

En este paso se otorga en el cuadro de composición del portafolio una distribución de participación equitativa para cada uno de los activos, y la columna del valor de la inversión se obtiene de la división de la totalidad de la inversión del portafolio entre el porcentaje de participación de cada activo.

Posterior a la elaboración del cuadro de composición del portafolio, se procede a generar dos matrices transpuestas, en pro de apalancarse de las funciones de una hoja de cálculo de Excel y poder emplear de nuevo la herramienta de =MMULT en la obtención de la Varianza del Portafolio.

Para elaborar estas matrices transpuestas, se debe tomar la columna de los activos y la columna de participación porcentual y pegarla en forma horizontal y también de forma vertical. Es indispensable que en el procedimiento de este paso los valores sean “llamados” o “citados” de las celdas de participación originales, para que el modelo nunca pierda su relación entre valores.

Tabla 17

Vector transpuesto horizontal de participación porcentual por activo para portafolio

	Canacol Energy	Bancolombia	Interconexión	Crude Oil - Apr	Almacenes Exit	Brent Oil Futu	USD/COP	Gold Futures -	US 2 Year T-No	Colombia 4-Ye
PARTICIPACION	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%

Nota. Elaboración propia

Tabla 18

Vector transpuesto vertical de participación porcentual por activo para portafolio

PARTICIPACIÓN	
Canacol Energy Ltd. (CNE)	10.00%
Bancolombia	10.00%
Interconexión Eléctrica S	10.00%
Crude Oil - Apr 17 (CLJ7)	10.00%
Almacenes Exito SA (IMI)	10.00%
Brent Oil Futures - May 1	10.00%
USD/COP	10.00%
Gold Futures - Apr 17 (GO	10.00%
US 2 Year T-Note Futures	10.00%
Colombia 4-Year Bond Yi	10.00%

Nota. Elaboración propia

Como paso previo al cálculo de la varianza del portafolio es necesario elaborar los vectores de participación que resultan de la multiplicación entre la matriz de varianza – covarianza y los porcentajes de participación transpuestos (formato horizontal). A continuación se muestran los 5 primeros activos para observar con detalle la operación realizada con todos los activos.

Tabla 19

Vector de participación producto de matriz de varianza covarianza por vector horizontal participación porcentual por activo para portafolio (Detalle)

	Canacol Energy	Bancolombia	Interconexión E	Crude Oil - Apr	Almacenes Exit
PARTICIPACION	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%
VECTORES DE PARTICIPA	=MMULT(AH259:AQ259,V275:AE284)			0.031081089	0.005736228

Nota. Elaboración propia

Estos vectores de participación se ven así para todos los activos:

Tabla 20

Vector de participación producto de matriz de varianza covarianza por vector horizontal
participación porcentual por activo para portafolio

	Canacol Energy	Bancolombia	Interconexión	Crude Oil - Apr	Almacenes Exit	Brent Oil Futures	USD/COP	Gold Futures	US 2 Year T-Note	Colombia 4-Year Bond
PARTICIPACION	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%
VECTORES DE PARTICIPACIÓN	0.018330652	0.005679747	0.002637844	0.031081089	0.005736228	0.030168824	-0.000692722	0.002469667	6.39908E-06	0.000805631

Nota. Elaboración propia

Teniendo estos vectores de participación completamos la información relevante para obtener la varianza del portafolio la cual se obtiene del producto entre esta matriz de vectores de participación y la columna de participación horizontal.

Tabla 21

Varianza del portafolio

	Canacol Energy	Bancolombia	Interconexión	Crude Oil - Apr	Almacenes Exit	Brent Oil Futures	USD/COP	Gold Futures	US 2 Year T-Note	Colombia 4-Year Bond
PARTICIPACION	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%
VECTORES DE PARTICIPACIÓN	0.018330652	0.005679747	0.002637844	0.031081089	0.005736228	0.030168824	-0.000692722	0.002469667	6.39908E-06	0.000805631
PARTICIPACIÓN										
Canacol Energy Ltd. (C)	10.00%									
Bancolombia	10.00%									
Interconexión Eléctrica	10.00%									
Crude Oil - Apr 17 (CLJ)	10.00%									
Almacenes Exitosa SA (M)	10.00%									
Brent Oil Futures - May	10.00%									
USD/COP	10.00%									
Gold Futures - Apr 17 (G)	10.00%									
US 2 Year T-Note Futures	10.00%									
Colombia 4-Year Bond	10.00%									

Nota. Elaboración propia

Con esta variable que recién se obtuvo se busca representar la medida de “dispersión” de las cotizaciones de todos los activos del portafolio como grado de desviación respecto a su media, teniendo en cuenta los factores de riesgo y covarianza entre los activos. En otras palabras busca representar en una medida estadística y de probabilidad el grado de riesgo total con las rentabilidades históricas de la totalidad del portafolio. Esta medida de varianza procede a suavizarse en pro de obtener una variable más fidedigna o con mayor acercamiento al comportamiento real.

Para esto se calcula la desviación estándar del portafolio que se haya de la raíz cuadrada de la varianza recién calculada.

Tabla 22

Riesgo del portafolio

VARIANZA PORT	0.009622336
RIESGO PORT	=RAIZ(AK263)

Nota. Elaboración propia

A continuación se calcula la rentabilidad del portafolio el cual se obtiene de la suma de los productos de la rentabilidad anual de los activos y las participaciones porcentuales de dichos activos.

Tabla 23

Rentabilidad del portafolio

	RENTABILIDAD	RIESGO	%	VALOR			
	K' ANUAL	D.E. ANUAL	%	INVERSIÓN			
Canacol Energy L	66.23%	40.72%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
Bancolombia	22.89%	19.91%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
Interconexión El	35.22%	15.58%	10.00%	\$ 100,000,000.00		VARIANZA PORT	0.009622336
Crude Oil - Apr 17	68.03%	46.28%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
Almacenes Exito	11.28%	20.26%	10.00%	\$ 100,000,000.00		RIESGO PORT	0.098093506
Brent Oil Futures	68.83%	43.19%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
USD/COP	-14.99%	17.77%	10.00%	\$ 100,000,000.00		RENTAB PORT	=SUMAPRODUCTO(P261:P270,R261:R270)
Gold Futures - Apr	8.42%	15.88%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
US 2 Year T-Note	-0.726%	0.962%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
Colombia 4-Year	-20.728%	16.023%	10.00%	\$ 100,000,000.00			
			100.00%				
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000						

Nota. Elaboración propia

Como última cifra relevante para la ejecución de la optimización del portafolio por parte del Solver, es necesario buscar un ratio que refleje el balance óptimo entre riesgo – rendimiento, para esto se calcula el índice Sharpe el cual representa el exceso de rendimiento por cada unidad de riesgo asumido. En la medida en que este índice sea mayor, expresa un nivel óptimo de rendimiento, por este motivo se emplea en el modelo para brindarle un punto de comparación al Solver y asignarle el objetivo de que maximicé dicho indicador.

Este índice se calcula con la división entre la rentabilidad del portafolio y la medida de riesgo del mismo.

Tabla 24

Índice Sharpe del portafolio

VARIANZA PORT	0.009622336
RIESGO PORT	0.098093506
RENTAB PORT	0.244450446
INDICE SHARPE	=AK267/AK265

Nota. Elaboración propia

Una vez se ha elaborado el modelo hasta este punto se encuentran todas variables y cifras pertinentes para la optimización del portafolio mediante la ayuda del Solver, para esto en la pestaña de datos, se abre el aplicativo y se procede a otorgar las condiciones expuestas en la introducción del documento.

Figura 2
Ubicación acceso aplicativo Solver en hoja de cálculo de Excel



Nota. Elaboración propia

6. OPTIMIZACIÓN DE LOS PORTAFOLIOS

En este punto es pertinente repasar las condiciones expuestas anteriormente:

Como primer punto fundamental, encontramos que la sumatoria de los activos debe ser igual a 1, o lo que sería su equivalente a 100%, también se estableció que la participación de cada activo debe ser superior a cero y ser como mínimo de 1% en la totalidad del portafolio.

Respecto a cada uno de los escenarios de riesgo, la condición relevante se representa en que la sumatoria de las participaciones de los activos de renta fija debe corresponder a la participación correspondiente al porcentaje de renta fija del portafolio, de igual forma con los activos de renta variable. Es decir que para el caso del portafolio de riesgo bajo el total de las participaciones de los activos de renta fija debe ser igual al 80% y la suma de la participación de los activos de renta variable ha de corresponder al 20%, y de manera similar para la distribución del portafolio de riesgo intermedio (50% Renta fija, 50% Renta variable) y de alto riesgo (20% Renta fija, 80% Renta variable).

Dadas dichas condiciones se procede a ingresar esta información en el aplicativo del Solver.

Figura 3
Ventana aplicativo Solver

Establecer objetivo:

Para: ☒ Máx. ☐ Mín ☐ Valor de: 0

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución: GRG Nonlinear

Método de resolución
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Ayuda Resolver Cerrar

Nota. Elaboración propia

En el campo “Establecer objetivo” se debe seleccionar la celda del índice Sharpe por los motivos anteriormente expuestos, y se debe seleccionar la opción de Máx. Indicándole al Solver que el objetivo es buscar el mayor valor posible en esta celda teniendo en cuenta todas las siguientes variables:

En el campo “Cambiando las celdas de variables” se selecciona la columna de participación porcentual del cuadro de composición del portafolio.

Dentro de las restricciones se debe agregar las condiciones anteriormente expuestas, donde la celda de sumatoria de las participaciones porcentuales debe ser igual a uno (1), y cada una de las celdas de las participaciones porcentuales de los activos debe ser mayor o igual a 0.01 (equivalente a 1%).

Figura 4
Restricciones y condicionales del portafolio diligenciados en aplicativo Solver

VARIANZA PORT	0.009622336
RIESGO PORT	0.098093506
RENTAB PORT	0.244450446
INDICE SHARPE	2.49201458

Adicional a las condiciones recién agregadas, es indispensable añadir la restricción donde se establezca el parámetro de participación de los activos correspondiente al nivel de riesgo del portafolio, para esto se agregan una sumatoria de la participación de los activos de renta variable y renta fija, y posterior a esto se agrega la respectiva condición que cada una de dichas celdas debe ser igual al porcentaje relevante para el nivel de riesgo del portafolio. El documento presente ilustra las restricciones para el portafolio de nivel de riesgo alto, manejando una participación de activos de renta fija de 20% y de activos de renta variable de 80%

Tabla 25

Calculo distribución de riesgo del portafolio

	RENTABILIDAD	RIESGO	%	VALOR
	K' ANUAL	D.E. ANUAL	%	INVERSIÓN
Canacol Energy Ltd	66.23%	40.72%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Bancolombia	22.89%	19.91%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Interconexión Elec	35.22%	15.58%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Crude Oil - Apr 17	68.03%	46.28%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Almacenes Exito S	11.28%	20.26%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Brent Oil Futures -	68.83%	43.19%	10.00%	\$ 100,000,000.00
USD/COP	-14.99%	17.77%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Gold Futures - Apr	8.42%	15.88%	10.00%	\$ 100,000,000.00
US 2 Year T-Note F	-0.726%	0.962%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Colombia 4-Year B	-20.728%	16.023%	10.00%	\$ 100,000,000.00
			100.00%	
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000			
% Partic RV	=SUMA(R261:R268)			
% Partic RF	20.00%			

Nota. Elaboración propia

Y Su correspondiente restricción:

Figura 5

Restricciones para distribución de riesgo del portafolio

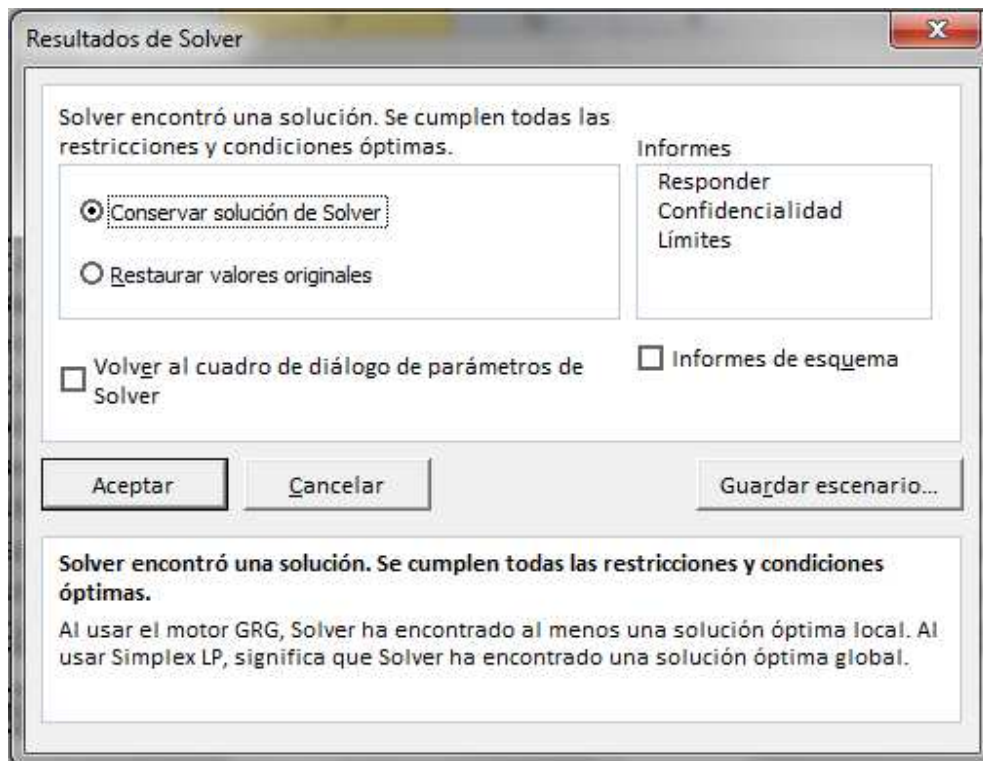
Sujeto a las restricciones:
\$P\$274 = 80%
\$P\$275 = 20%

Nota. Elaboración propia

Una vez se han agregado dichas condiciones, y se han dado los parámetros para el Solver, se procede a dar click en el botón de resolver. Automáticamente el programa buscará la mejor combinación para la participación de activos cumpliendo las restricciones dadas y con el objetivo de maximizar el índice Sharpe.

Se obtiene la siguiente ventana de respuesta por parte de la hoja de cálculo, y se hace clic en el botón de aceptar.

Figura 6
Ventana de confirmación aplicativo Solver



Nota. Elaboración propia

En este momento es pertinente evaluar la nueva combinación de participaciones de los activos y ver cómo han cambiado las variables, donde se tiene una distribución porcentual de los activos que cumple con la característica de riesgo indicado para el portafolio. Y también un índice Sharpe optimizado.

Como resultado se tiene una distribución de las participaciones de los activos óptima, donde la rentabilidad es la máxima para el nivel de riesgo aceptado.

En el presente documento se ilustra la nueva configuración de distribución porcentual para el portafolio de alto nivel de riesgo:

Tabla 26

Nueva distribución de participación porcentual por activo del portafolio

	RENTABILIDAD	RIESGO	%	VALOR
	K' ANUAL	D.E. ANUAL	%	INVERSIÓN
Canacol Energy Ltd	66.23%	40.72%	8.25%	\$ 82,498,422.93
Bancolombia	22.89%	19.91%	5.84%	\$ 58,387,877.02
Interconexión Elec	35.22%	15.58%	27.38%	\$ 273,832,847.67
Crude Oil - Apr 17	68.03%	46.28%	9.92%	\$ 99,193,789.72
Almacenes Exito S	11.28%	20.26%	1.00%	\$ 10,000,000.00
Brent Oil Futures -	68.83%	43.19%	1.00%	\$ 10,000,000.00
USD/COP	-14.99%	17.77%	14.01%	\$ 140,131,297.97
Gold Futures - Apr	8.42%	15.88%	12.60%	\$ 125,955,764.69
US 2 Year T-Note F	-0.726%	0.962%	10.00%	\$ 100,000,000.00
Colombia 4-Year B	-20.728%	16.023%	10.00%	\$ 100,000,000.00
			100.00%	
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000			INDICE SHARPE 3.087279305

Nota. Elaboración propia

7. FRONTERA EFICIENTE DE LOS PORTAFOLIOS

Dentro de las alternativas del inversionista está la posibilidad de buscar obtener una mayor rentabilidad asumiendo un mayor nivel de riesgo, o al contrario manejar un portafolio con menor riesgo al que corresponda una menor rentabilidad, para esto se elabora la curva de la frontera eficiente, donde el inversionista podrá evaluar las distintas combinaciones de riesgo y rendimiento, manteniendo todas las restricciones anteriormente expuestas y evaluando de igual forma todas las variables.

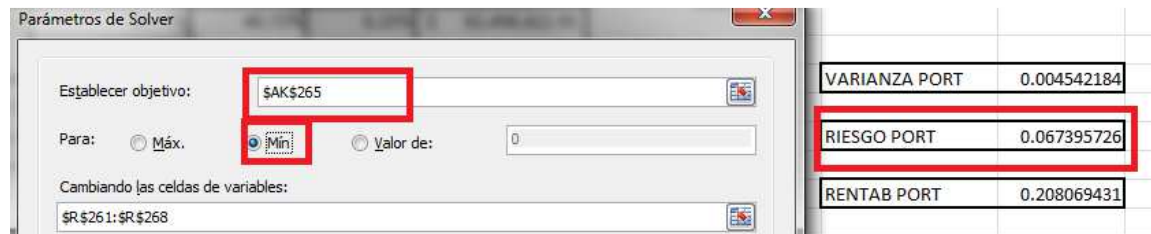
En el proceso de crear esta curva de frontera eficiente se debe como punto de partida encontrar el rendimiento para el menor nivel de riesgo, y de igual forma el riesgo para el mayor nivel de rendimiento, estos valores otorgan el rango entre el cual se desarrollará la curva.

Para obtener esta información se emplea de nuevo la herramienta de Solver, manejando siempre las mismas restricciones anteriormente establecidas.

La configuración del aplicativo Solver para la búsqueda del rendimiento correspondiente al menor nivel de riesgo va a cambiar la celda objetivo, anteriormente seleccionada índice Sharpe, ahora se selecciona la celda de riesgo del portafolio, y el objetivo va a ser buscar el mínimo riesgo.

Figura 7

Nueva restricción en Solver para cálculo de límite por mínimo riesgo para curva de frontera eficiente del portafolio



Nota. Elaboración propia

Una vez se ejecute el aplicativo se obtiene una nueva distribución de las participaciones porcentuales de los activos, pero eso no es relevante en la construcción de la curva de la frontera eficiente. Se debe copiar el nuevo valor de la celda de rentabilidad portafolio y también el valor de la celda de riesgo del portafolio.

Este valor se va a almacenar en una tabla que se elabora de forma manual, de 3 columnas, donde la primera va a estar diligenciada con el número de observaciones que se deseen evaluar para la elaboración de la curva de la frontera eficiente. La segunda columna va a corresponder al nivel de riesgo y la tercera al nivel de rentabilidad.

Tabla 27

Límite de mínimo riesgo para cálculo de curva de frontera eficiente del portafolio

	Riesgo	Retorno
MV	4.19565%	7.92746%

Nota. Elaboración propia

Se realiza el mismo procedimiento con el objetivo de obtener el riesgo para el mayor nivel de rendimiento, el Solver se configura seleccionando la celda objetivo ahora con la celda de Rentabilidad del portafolio y se asigna el objetivo de maximizar esta celda, se ejecuta el aplicativo y se copia como valores la información recolectada tanto de máximo nivel del rendimiento como de riesgo correspondiente en la tabla elaborada.

Tabla 28

Calculo de puntos para curva de frontera eficiente del portafolio

	Riesgo	Retorno
MV	4.19565%	7.92746%
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
X	30.97906%	50.07073%

Nota. Elaboración propia

Con esta información diligenciada, se procede a encontrar una medida que distribuya equitativamente la distancia entre los puntos de riesgo mínimo y de riesgo máximo, para esto se haya el número correspondiente a la cantidad de pasos o de observaciones a evaluar. Este se obtiene de la división de la diferencia entre el riesgo máximo y el riesgo mínimo sobre la cantidad de observaciones más uno (1).

Tabla 29

Calculo distribución equitativa puntos para curva de frontera eficiente del portafolio

	Riesgo	Retorno	
MV	4.19565%	7.92746%	
1			
2			
3			Pasos $= (0.289 - 0.278) / 11$
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
X	30.97906%	50.07073%	

Nota. Elaboración propia

Una vez se obtiene ese valor se asigna el nivel de riesgo dado para cada observación, esta se obtiene de la suma de la mínima observación más el numero recién hallado, y posterior a esto, la suma al último nivel de riesgo más el numero paso. Esto otorga una distribución equidistante entre los niveles de riesgo para el número de observaciones.

Tabla 30

Puntos de riesgo dados para cálculo de curva frontera eficiente del portafolio

	Riesgo	Retorno
MV	4.19565%	7.92746%
1	=0.278+(\$281	
2	9.06536%	
3	11.50021%	
4	13.93507%	
5	16.36992%	
6	18.80478%	
7	21.23964%	
8	23.67449%	
9	26.10935%	
10	28.54420%	
X	30.97906%	50.07073%

Pasos	0.024348557
-------	-------------

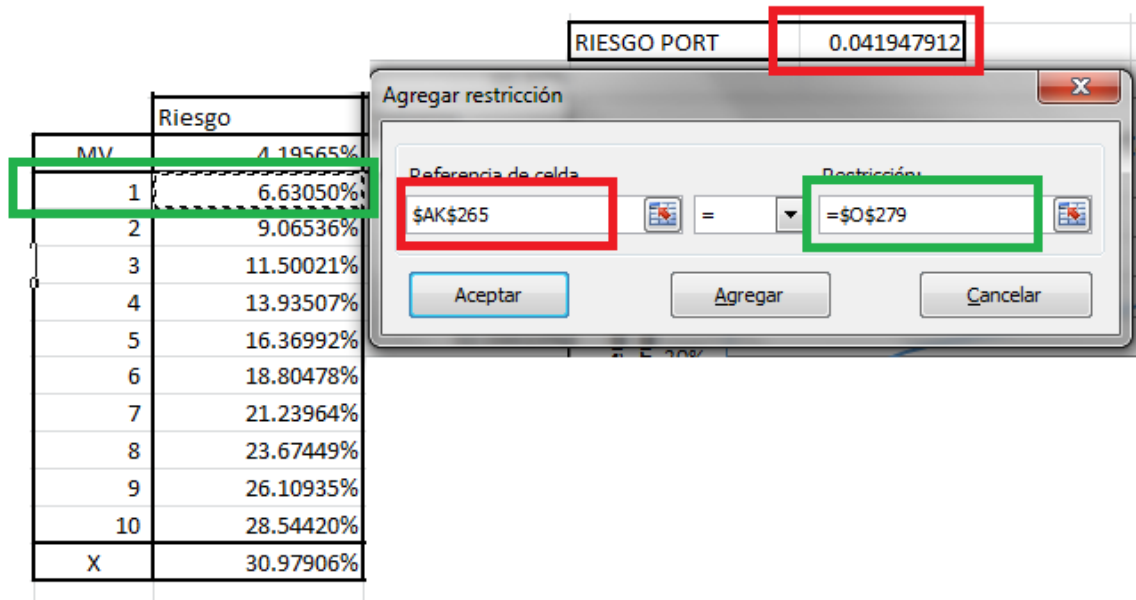
Nota. Elaboración propia

Una vez establecidos los niveles de riesgo para cada observación se procede a realizar una evaluación de escenario empleando nuevamente la herramienta de Solver.

Se configura ahora añadiendo una nueva restricción en donde se parametriza que el nivel de riesgo del portafolio sea igual al nivel de riesgo del número de observación en evaluación. Es decir se agrega la restricción de que el riesgo total del portafolio debe ser igual al porcentaje de riesgo correspondiente para la primera observación. Esta restricción se ilustra a continuación.

Figura 8

Restricción respectiva para cada nivel de riesgo dado en calculo curva frontera eficiente del portafolio



Nota. Elaboración propia

Se ejecuta el aplicativo con esta nueva restricción y manteniendo las mismas restricciones anteriores, y manteniendo también el objetivo de maximizar el rendimiento del portafolio. Una vez el Solver arroja el nuevo resultado, se debe tomar el nuevo nivel de rentabilidad y pegar como valor en la tabla construida para la elaboración de la curva de frontera eficiente.

Este proceso se realiza para cada nivel de riesgo de cada observación, modificando la restricción asignando el nuevo nivel de riesgo correspondiente al número de la observación, de esta forma se alimenta la tabla hasta completar la totalidad de los rendimientos correspondientes para cada nivel de riesgo. Se ilustra a continuación el resultado para el portafolio de alto nivel de riesgo.

Tabla 31

Puntos de riesgo y retorno para curva de frontera eficiente del portafolio

	Riesgo	Retorno
MV	4.19565%	7.92746%
1	6.63050%	14.38274%
2	9.06536%	21.41755%
3	11.50021%	25.56700%
4	13.93507%	28.77166%
5	16.36992%	32.04615%
6	18.80478%	35.14342%
7	21.23964%	38.13621%
8	23.67449%	40.96346%
9	26.10935%	43.99533%
10	28.54420%	47.25895%
X	30.97906%	50.07073%

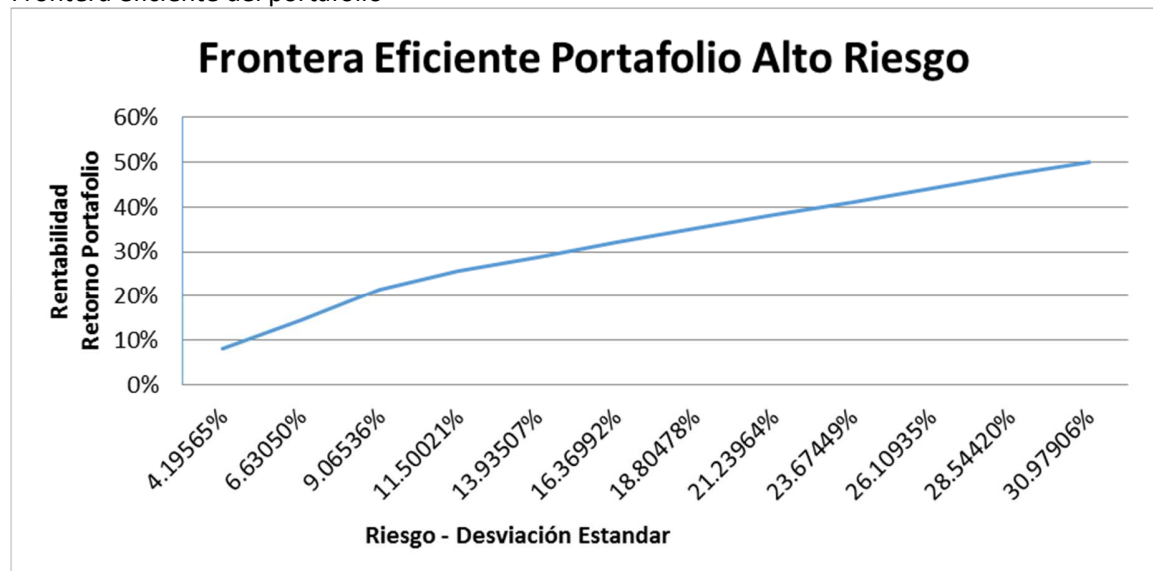
Nota. Elaboración propia

Una vez se tiene la información de la tabla de la curva de frontera eficiente completa se procede a graficar como eje X la columna de riesgo y como eje Y la columna de rentabilidad o retorno.

Se ilustra a continuación la curva relativa a los máximos niveles de rentabilidad para cada nivel dado de riesgo, o lo que es equitativo, los mínimos niveles de riesgo para el grado de rentabilidad esperado.

Grafico 2

Frontera eficiente del portafolio



Nota. Elaboración propia

El inversionista se encuentra frente a la posibilidad de escoger cualquier punto presente en la curva dependiendo de sus necesidades o preferencias frente al nivel de riesgo que esté dispuesto a aceptar o al nivel de rentabilidad que desee buscar.

8. LIQUIDACIÓN DE LOS PORTAFOLIOS

Como procedimiento final para concluir la evaluación de la optimización de los portafolios basados en la teoría de frontera eficiente de Markowitz, es necesario realizar la liquidación del portafolio en pro de obtener los resultados de dichos modelos.

El presente documento ilustra a continuación las liquidaciones para los 3 portafolios y sus respectivos análisis. Con este proceso se identifica el resultado neto de cada portafolio, empleando el análisis de escenario. Esto permite plantear conclusiones y resultados sustentados en el rendimiento real de cada uno de los portafolios, ya que este procedimiento es completamente igual al que se debe realizar con un portafolio de inversión real en pro de conocer las utilidades o pérdidas del mismo para un tiempo dado.

Esta liquidación se realiza obteniendo la cantidad de acciones o de especie correspondiente a la inversión otorgada para el activo de acuerdo a la participación porcentual del portafolio eficiente, y de acuerdo al precio de cotización de dicho activo para el día de creación del portafolio, posteriormente se calcula la suma de dinero correspondiente al número de acciones o de especie de acuerdo al precio de cotización del activo para el día de liquidación del portafolio.

Se estableció en el presente documento como día de apertura del portafolio el 1° de Febrero de 2017 y como día de liquidación el 28° de Febrero de 2017.

A continuación se ilustran las tablas de liquidación para cada portafolio:

Portafolio alto nivel de riesgo:

Tabla 32

Liquidación del portafolio alto nivel de riesgo

	%	VALOR				
	%	INVERSIÓN	# de Acciones /Especie a la compra (Valor Liquidación	PYG
Canacol Energy	8.24%	\$ 82,428,029.34	9,931.09		85,903,910.09	\$ 3,475,880.76
Bancolombia	5.86%	\$ 58,634,350.53	2,125.97		58,039,077.94	\$ (595,272.59)
Interconexión I	27.38%	\$ 273,811,370.11	26,127.04		292,622,838.29	\$ 18,811,468.18
Crude Oil - Apr	9.90%	\$ 98,998,112.58	1,815,812.78		98,471,526.88	\$ (526,585.71)
Almacenes Exit	1.00%	\$ 10,000,000.00	644.33		10,012,886.60	\$ 12,886.60
Brent Oil Futur	1.00%	\$ 10,000,000.00	175,070.03		9,877,450.98	\$ (122,549.02)
USD/COP	13.96%	\$ 139,615,962.33	48,057.26		140,786,156.70	\$ 1,170,194.37
Gold Futures - A	12.65%	\$ 126,512,154.69	104,702.60		131,286,593.37	\$ 4,774,438.68
US 2 Year T-Not	10.00%	\$ 100,000,000.00	925,052.27		100,358,920.28	\$ 358,920.28
Colombia 4-Yea	10.00%	\$ 100,000,000.00	15,455,950.54		98,918,083.46	\$ (1,081,916.54)
	100.00%	\$ 999,999,979.58			\$ 1,026,277,444.58	\$ 26,277,465.00
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000.00					
Cotizacion	01/02/2017		28/02/2017			
Canacol Energy	8,300.00		8,650.00	4.2%		
Bancolombia	27,580.00		27,300.00	-1.0%		
Interconexión I	10,480.00		11,200.00	6.9%		
Crude Oil - Apr	54.52		54.23	-0.5%		
Almacenes Exit	15,520.00		15,540.00	0.1%		
Brent Oil Futur	57.12		56.42	-1.2%		
USD/COP	2,905.20		2,929.55	0.8%		
Gold Futures - A	1,208.30		1,253.90	3.8%		
US 2 Year T-Not	108.10		108.49	0.4%		
Colombia 4-Yea	6.47		6.40	-1.1%		

Nota. Elaboración propia

Portafolio nivel de riesgo intermedio:

Tabla 33

Liquidación del portafolio de riesgo intermedio

	%	VALOR				
	%	INVERSIÓN	# de Acciones /Especie a la compra (Valor Liquidación	PYG
USD/COP	1.00%	\$ 10,000,000.00	1,204.82		10,421,686.75	\$ 421,686.75
Crude Oil - Apr	30.95%	\$ 309,474,458.34	5,676,347.36		307,828,317.60	\$ (1,646,140.74)
Gold Futures - A	1.00%	\$ 10,000,000.00	8,276.09		10,377,389.72	\$ 377,389.72
Interconexión E	16.05%	\$ 160,525,559.89	15,317.32		171,554,033.47	\$ 11,028,473.58
Almacenes Exit	1.00%	\$ 10,000,000.00	644.33		10,012,886.60	\$ 12,886.60
US 2 Year T-Not	1.00%	\$ 10,000,000.00	92,506.94		10,036,077.71	\$ 36,077.71
Colombia 4-Yea	1.00%	\$ 10,000,000.00	1,545,595.05		9,891,808.35	\$ (108,191.65)
EuroMTS Euroz	28.00%	\$ 280,000,007.18	1,128,263.43		283,428,799.75	\$ 3,428,792.56
Canada 3-Year	10.00%	\$ 100,000,000.00	107,642,626.48		103,982,777.18	\$ 3,982,777.18
U.S. 5-Year Bon	10.00%	\$ 100,000,000.00	51,706,308.17		100,206,825.23	\$ 206,825.23
	100.00%	\$ 1,000,000,025.41			\$ 1,017,740,602.34	\$ 17,740,576.94
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000.00					
Cotizacion	01/02/2017		28/02/2017			
USD/COP	8,300.00		8,650.00	4.22%		
Crude Oil - Apr	54.52		54.23	-0.53%		
Gold Futures - A	1,208.30		1,253.90	3.77%		
Interconexión E	10,480.00		11,200.00	6.87%		
Almacenes Exit	15,520.00		15,540.00	0.13%		
US 2 Year T-Not	108.10		108.49	0.36%		
Colombia 4-Yea	6.47		6.40	-1.08%		
EuroMTS Euroz	248.17		251.21	1.22%		
Canada 3-Year	0.93		0.97	3.98%		
U.S. 5-Year Bon	1.93		1.94	0.21%		

Nota. Elaboración propia

Portafolio de riesgo bajo:

Tabla 34

Liquidación del portafolio de riesgo bajo

	%	VALOR				
	%	INVERSIÓN	# de Acciones /Especie a la compra (Valor Liquidación	PYG
Almacenes Exit	36.02%	\$ 360,246,589.39	23,211.76		360,710,824.68	\$ 464,235.30
Crude Oil - Apr	10.98%	\$ 109,753,408.63	2,013,085.26		109,169,613.91	\$ (583,794.73)
US 2 Year T-Not	1.00%	\$ 10,000,000.00	92,506.94		10,036,077.71	\$ 36,077.71
Colombia 4-Yea	1.00%	\$ 10,000,000.00	1,545,595.05		9,891,808.35	\$ (108,191.65)
Chile 3-Year Bo	1.00%	\$ 10,000,000.00	2,840,909.09		9,914,772.73	\$ (85,227.27)
EuroMTS Euroz	1.00%	\$ 10,000,000.00	40,295.12		10,122,456.87	\$ 122,456.87
Canada 3-Year f	21.10%	\$ 210,965,546.69	227,088,855.42		219,367,834.34	\$ 8,402,287.65
U.S. 5-Year Bon	7.90%	\$ 79,034,453.15	40,865,797.91		79,197,916.35	\$ 163,463.19
Peru 9-Year Bon	10.00%	\$ 100,000,000.00	16,515,276.63		101,486,374.90	\$ 1,486,374.90
Mexico 3-Year f	10.00%	\$ 100,000,000.00	14,632,718.76		101,258,413.81	\$ 1,258,413.81
	100.00%	\$ 999,999,997.86			\$ 1,011,156,093.63	\$ 11,156,095.77
INVERSIÓN	\$ 1,000,000,000.00					
Cotizacion	23/01/2017		28/02/2017			
Almacenes Exit	15,520.00		15,540.00	0.13%		
Crude Oil - Apr	54.52		54.23	-0.53%		
US 2 Year T-Not	108.10		108.49	0.36%		
Colombia 4-Yea	6.47		6.40	-1.08%		
Chile 3-Year Bo	3.52		3.49	-0.85%		
EuroMTS Euroz	248.17		251.21	1.22%		
Canada 3-Year f	0.93		0.97	3.98%		
U.S. 5-Year Bon	1.93		1.94	0.21%		
Peru 9-Year Bon	6.06		6.15	1.49%		
Mexico 3-Year f	6.83		6.92	1.26%		

Nota. Elaboración propia

9. COMPARACIÓN DE LOS PORTAFOLIOS

Como se puede observar en las respectivas liquidaciones el nivel de rentabilidad obtenido para cada uno de los portafolios corresponde al nivel de riesgo dado, donde el portafolio de bajo nivel de riesgo obtiene su respectiva menor rentabilidad, en comparación con la obtenida en el portafolio de alto nivel de riesgo siendo la mayor de los tres (3) retornos.

Se debe evaluar la optimización otorgada por el modelo de acuerdo a la composición de activos de cada portafolio, como se pudo observar a lo largo del documento, y teniendo en cuenta la selección de activos hecha, la varianza negativa entre los activos postula tener un rol determinante en la funcionalidad del modelo, puesto que dado el escenario de una selección de activos del mismo sector, es posible que el modelo busque distribuir altos niveles de covarianza sin ningún resultado representativo para el objeto de la optimización del portafolio. Contrario al escenario desarrollado donde activos como lo son el dólar versus el petróleo WTI y el petróleo Brent presentan una relación inversa, al igual que lo llega a reflejar los activos de Interconexión Eléctrica ISA versus Almacenes Éxito IMI, y contrario a lo que se puede observar entre los bonos del tesoro americano para dos años versus los bonos a cinco años.

Bajo esta premisa resulta evidente la consecuencia de rentabilidad de los portafolios. Donde un portafolio con mayor grado de aleatoriedad o con una composición con menor relación genera las características indicadas para una ejecución de optimización de mayor provecho para el inversionista.

10. RENTABILIDAD DE LOS PORTAFOLIOS

De acuerdo a las rentabilidades observadas para cada portafolio con su respectivo nivel de riesgo asumido, se puede afirmar que a pesar que el inversionista se ve enfrentado a diferentes opciones de inversión no necesariamente el tener una mayor exposición al riesgo le otorgara en medida directamente proporcional un mayor nivel de rentabilidad, puesto que se logró evidenciar niveles de rentabilidad equitativos para niveles de riesgo significativamente distantes.

Lo anterior permite proponer un gran margen de opciones de inversión a los inversionistas que deseen ocupar sus excesos de liquidez en rangos de tiempo no necesariamente de largo plazo, ahora el cuestionamiento surge sobre la eficiencia de los mercados y la agilidad y liquidez de los mismos. Sobre este respecto se puede afirmar que los avances a nivel tecnológico e incluso la legislación

financiera cada día fomenta un escenario donde este tipo de inversiones resultan posibles, y la interconexión de la información a nivel mundial cada día abre más las puertas a lo que en algún momento fue el fenómeno de la bancarización, ahora pueda llegar a serlo el fenómeno de apertura de los mercados para un mayor número de personas.

11. VENTAJAS DEL MODELO

Posterior al análisis respectivo de los modelos desarrollados en el presente documento resulta evidente el provecho que se encuentra en el empleo del modelo. Resulta indiscutible el comparar las posibilidades que tiene el conformar un portafolio basado únicamente en un análisis fundamental o macroeconómico, versus una composición de un portafolio óptimo bajo el empleo del modelo de frontera eficiente de Markowitz, sin dejar de lado que el concepto de eficiencia del mercado juega un rol esencial en el funcionamiento de estas teorías y prácticas, y esto pone sobre la mesa la incógnita de si el mercado global está funcionando sobre un mercado eficiente o si por el contrario la fluctuación del mismo está atada a variables de carácter específico como medidas gubernamentales, respecto a inventarios energéticos, o incluso grandes movimientos de capitales entre empresas transnacionales.

12. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

12.1. CONCLUSIONES

- La rentabilidad de un portafolio ubicado en la curva de la frontera eficiente está directamente relacionada al nivel de riesgo asumido y a la ponderación de participaciones de los activos de cada tipo de renta fija o renta variable.

Esto puede ser evaluado en el proceso efectuado en la liquidación de los portafolios, donde el portafolio con el menor nivel de riesgo asumido obtuvo el menor nivel de rentabilidad de los tres (3) portafolios, en de riesgo intermedio obtuvo el nivel medio de rentabilidad entre los tres (3) portafolios y el portafolio con mayor nivel de riesgo asumido obtuvo el mayor nivel de rendimiento de los portafolios en mención.

- La varianza entre activos es fundamental en la gestión de diversificación de riesgo que puede logra ejecutar el modelo de optimización de portafolios.

Como se sustenta en la comparación de los portafolios, la variable de nivel de varianza entre los activos del portafolio toma un rol fundamental en lo provechoso o no del modelo de optimización para el inversionista, siendo que un nivel general de varianza positivo entre los activos, va a representar una muy mala distribución del riesgo entre el portafolio, mientras que una varianza negativa entre los activos permite generar una óptima distribución del riesgo entre los activos soportando posibles pérdidas con posibles utilidades entre un par de activos y de esta forma dispersar los niveles de retorno en el mismo rango de covarianza para la totalidad del portafolio.

- La eficiencia del mercado es una de las principales variables que define el grado de utilidad en la aplicación de un modelo de optimización de portafolios por curva de frontera eficiente.

Como se plantea en el desarrollo de la rentabilidad de los portafolios y las ventajas del modelo, en la práctica resulta fundamental que la eficiencia del mercado sea óptima para que la utilización del modelo de optimización de portafolios por curva de frontera eficiente resulte provechosa para el inversionista.

- La información histórica del comportamiento de un activo no necesariamente refleja su comportamiento futuro y a nivel estadístico, el dejar de lado información de carácter fundamental (macroeconómico) puede llegar a eliminar la utilidad del modelo de optimización de portafolios por curva de frontera eficiente.

Como se expuso en los últimos párrafos del segundo capítulo de selección de activos, se debe tener en consideración el grado de pertinencia que se le otorga a la información histórica puesto que esta no necesariamente otorga un reflejo exacto de lo que será el comportamiento futuro de un activo, para este punto se sugiere emplear metodologías estadísticas como lo es un Cuadro de Control EWMA donde se otorgue el nivel de importancia correspondiente a cada dato perteneciente al conjunto de la información histórica, esto con el propósito de tener una ponderación más acertada y que permita realizar perfeccionamientos al modelo.

También resulta imprescindible la información macroeconómica, o lo que se conoce como análisis fundamental, al momento de la aplicación del modelo de optimización, puesto que en la práctica de una inversión en un portafolio de activos, las condiciones globales tanto políticas como económicas y de otras índoles tienen gran influencia en el rendimiento de dicho portafolio y por este motivo no se puede relegar la toma de las decisiones de la composición del portafolio única y exclusivamente a un análisis cuantitativo.

- Es necesario para el inversionista encontrar un balance entre información técnica e información fundamental.

En concordancia con el anterior punto, es necesario involucrar dentro de las variables que estructuran el análisis para la composición de un portafolio de inversión, tanto información cuantitativa como cualitativa sobre los sectores de la economía, o las características gubernamentales de los activos en los que se va a invertir.

- Es necesario para el inversionista incluir un porcentaje de análisis técnico (estadístico) para sus inversiones en su búsqueda por aumentar la rentabilidad de su portafolio o en su búsqueda de disminuir el riesgo del mismo.

Posterior a los resultados obtenidos con los modelos de optimización para los portafolios evaluados en el presente documento, resulta evidenciable la pertinencia y utilidad del empleo de análisis estadísticos y de estudios cuantitativos sobre las posibilidades de inversión, ya que es indiscutible el beneficio implícito en el manejo de recursos partiendo de decisiones tomadas con base en análisis cuantitativos en comparación con decisiones tomadas por simple aleatoriedad.

12.2. RECOMENDACIONES

El análisis del presente documento permite afirmar que se puede desarrollar una línea de investigación donde se busque perfeccionar un modelo paralelo al elaborado por Markowitz y posteriormente pulido por otros economistas y financieros, que incluya la cuantificación de información exógena a los datos históricos de los activos, donde se busque cuantificar variables fundamentales en formato de ratios o de betas.

Se sugiere se profundice en la conformación de modelos de optimización de portafolios enfocados en renta fija en pro de obtener niveles de rentabilidad superiores a los presentes en las inversiones de renta variable, asumiendo menor nivel de riesgo.

13. ANEXOS

Se adjunta al presente documento tres (3) archivos en Excel (.xlsx) correspondientes a los tres modelos de optimización de portafolios y sus correspondientes liquidaciones para cada uno de los portafolios evaluados.

14. ÍNDICE DE GRÁFICOS

1. Curva de frontera eficiente	15
2. Frontera eficiente del portafolio	43

15. ÍNDICE DE FIGURAS

1. Sistema Financiero Colombiano	10
2. Ubicación acceso aplicativo Solver en hoja de cálculo de Excel	33
3. Ventana aplicativo Solver	34
4. Restricciones y condicionales del portafolio diligenciados en aplicativo Solver	35
5. Restricciones para distribución de riesgo del portafolio	36
6. Ventana de confirmación aplicativo Solver	37
7. Nueva restricción en Solver para cálculo de límite por mínimo riesgo para curva de frontera eficiente del portafolio	39
8. Restricción respectiva para cada nivel de riesgo dado en calculo curva frontera eficiente del portafolio	42

16. ÍNDICE DE ECUACIONES

1 Sumatoria de la totalidad de activos igual a uno (1)	16
2. Función objetivo multiplicación de matrices	17

17. ÍNDICE DE TABLAS

1 Cuántos activos hacen un portafolio diversificado	14
---	----

2. Composición de activos portafolio de alto riesgo	19
3. Composición de activos portafolio de riesgo intermedio	20
4. Composición de activos portafolio de bajo riesgo	20
5. Información histórica cotización diaria del activo	22
6. Rendimiento diario del activo	22
7. Diferencia entre rendimientos diarios del activo	23
8. Medidas estadísticas relevantes del activo	24
9. Covarianza diaria entre activo 1 y activo 2	25
10. Promedio de covarianza entre par de activos	25
11 Desviación estándar entre par de activos	26
12. Matriz de correlación para el portafolio	27
13. Matriz de Riesgo para portafolio	27
14. Matriz de Correlación – Riesgo para portafolio	28
15. Matriz Varianza – Covarianza para portafolio	28
16. Rendimiento y desviación estándar anualizada, porcentaje de participación y valor de inversión para portafolio	29
17. Vector transpuesto horizontal de participación porcentual por activo para portafolio	30
18. Vector transpuesto vertical de participación porcentual por activo para portafolio	30
19. Vector de participación producto de matriz de varianza covarianza por vector horizontal participación porcentual por activo para portafolio (Detalle)	30
20. Vector de participación producto de matriz de varianza covarianza por vector horizontal participación porcentual por activo para portafolio	31
21. Varianza del portafolio	31
22. Riesgo del portafolio	32
23. Rentabilidad del portafolio	32
24. Índice Sharpe del portafolio	33
25. Calculo distribución de riesgo del portafolio	36
26. Nueva distribución de participación porcentual por activo del portafolio	38
27. Límite de mínimo riesgo para cálculo de curva de frontera eficiente del portafolio	39
28. Calculo de puntos para curva de frontera eficiente del portafolio	40
29. Calculo distribución equitativa puntos para curva de frontera eficiente del portafolio	40
30. Puntos de riesgo dados para cálculo de curva frontera eficiente del portafolio	41

31. Puntos de riesgo y retorno para curva de frontera eficiente del portafolio	43
32. Liquidación del portafolio alto nivel de riesgo	45
33. Liquidación del portafolio de riesgo intermedio	46
34. Liquidación del portafolio de riesgo bajo	47

18. BIBLIOGRAFÍA

- ❖ Autorreguladora del mercado de valores AMV. Abc del inversionista. Bogotá - (2009).

- ❖ García, Gómez. Selección de portafolios eficientes de inversión a través de carteras colectivas, Trabajo de grado Magister Universidad Nacional de Colombia, Bogotá. 2012
- ❖ Fama, E. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. The Journal of Finance , 383-427 (1970).
- ❖ Hirt, B. Fundamentos de Gerencia Financiera (11 ed.). (L. S. Arévalo, Ed.) Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill (2001).
- ❖ Markowitz, H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. New York: Willey (1959).
- ❖ Modigliani, F. Capital Markets. Institutions and Instruments (4 Ed.). United States of America: Prentice Hall (2009)
- ❖ Sharpe, William F. "A Simplified Model for Portfolio Analysis". Management Science, January, p 277 – 293 (1963).
- ❖ Statman, M. How Many Stocks Make a Diversified Portfolio. Journal of Financial and Quantitative Analysis , 22: 353 - 364. September (1987).
- ❖ Kolb. Inversiones (Vol. 1). México: Editorial Limusa (1993).
- ❖ www.investing.com